I.M. Gelfand and S. V. Formin (1963) *Calculus of Variations*, Prentice-Hall.

# 7. Variational Problems Involving Multiple Integrals

2010/08　鈴木幸人

## 37. Variation of a Functional Defined on a Variable Region

### 37.1 Statement of the problem

関数 $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ とコンパクト部分集合 $R \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、汎関数 $J: C^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ を

$$J[u] \coloneqq \int_R F(x, u, \nabla u) dx, \quad u \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

と定義する。

パラメータ $\epsilon \in \mathbb{R}$ をもつ変換：$(x, u) \mapsto (x^*, u^*)$

$$\begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) \quad (i = 1, \dots, n), \\ u^* &= \Psi(x, u, \nabla u; \epsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

ただし

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, u, \nabla u; 0) &= x_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \Psi(x, u, \nabla u; 0) &= u \end{aligned} \tag{3}$$

を考える。ここで変換を定める関数 $\Phi_i\ (i = 1, \dots, n)$ と $\Psi$ は $\epsilon$ に関して微分可能であるとする[1]。この変換は、$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の曲面

$$u = u(x) \quad (x \in R)$$

を

$$u^* = u^*(x^*) \quad (x^* \in R^*)$$

に移す[2]。ただし

$$R^* \coloneqq \{(\Phi_1(x, u(x), \nabla u(x); \epsilon), \dots, \Phi_n(x, u(x), \nabla u(x); \epsilon)) : x \in R\}$$

である。したがって、この変換によって(1)式の汎関数は

$$J[u^*(x^*)] \coloneqq \int_{R^*} F(x^*, u^*, \nabla^* u^*) dx^*$$

と変換される。

---

[1] さらに $x$ に関して２階微分可能であるとする（(i)式,(12)式,(14)式参照）。

[2] 実際、$u = u(x)$ なる関係が与えられたとき、$(x^*, u^*)$ は $x \in R$ の関数として

$$x_i^* = \Phi_i(x, u(x), \nabla u(x); \epsilon) = f_i(x), \quad u^* = \Psi(x, u(x), \nabla u(x); \epsilon) = g(x)$$

と表される（ここで、$\mathbb{R}^n$次元の曲面 $u = u(x)$ は $x \in R \subset \mathbb{R}^n$ をパラメータとして表されていると考えることができ、各 $x \in R$ に対応する曲面上の点 $(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ は変換によって $(x^*, u^*(x^*)) = (f(x), g(x))$ に移ることになる）。したがって $\det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$ ならば $x = f^{-1}(x^*), x^* \in R^*$ と表すことができて

$$u^* = g \circ f^{-1}(x^*)$$

なる関係が得られる。

## 37.2 Calculation of $\delta x_i$ and $\delta u$

$\epsilon$ を微小量として、$\Phi_i\ (i = 1, \dots, n)$ と $\Psi$ を Taylor 級数展開すると

$$x_i^* = \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = \Phi_i(x, u, \nabla u; 0) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0} + o(\epsilon),$$

$$u^* = \Psi(x, u, \nabla u; \epsilon) = \Psi(x, u, \nabla u; 0) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \Psi(x, u, \nabla u; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0} + o(\epsilon)$$

であるが、(3)式を用いると

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \epsilon\varphi_i(x, u, \nabla u) + o(\epsilon), \\ u^* &= u + \epsilon\psi(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \end{aligned} \tag{4}$$

ただし

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, u, \nabla u) &\coloneqq \frac{d}{d\epsilon} \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0}, \\ \psi(x, u, \nabla u) &\coloneqq \frac{d}{d\epsilon} \Psi(x, u, \nabla u; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の曲面 $u = u(x)$ が与えられたとき、(4)式で表される $x$ と $u$ の変換による増分は $x$ の関数として表すことができて

$$\Delta x_i \coloneqq x_i^* - x_i = \epsilon\varphi_i(x) + o(\epsilon) \tag{6}$$

および

$$\Delta u \coloneqq u^* - u = \epsilon\psi(x) + o(\epsilon) \tag{7}$$

となる[3]。ただし

$$\varphi_i(x) \coloneqq \varphi_i\big(x, u(x), \nabla u(x)\big),$$

$$\psi(x) \coloneqq \psi\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)$$

と置いた。したがって、増分の微小量 $\epsilon$ に関する線型部分として

$$\delta x_i = \epsilon\varphi_i(x), \quad \delta u = \epsilon\psi(x) \tag{8}$$

が得られる。

一方、$\boldsymbol{x}$ を固定した増分を

$$\overline{\Delta u} \coloneqq u^*(x) - u(x)$$

と定義し、新たな関数 $\bar{\psi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を導入して

$$\overline{\Delta u} = \epsilon\bar{\psi}(x) + o(\epsilon)$$

と表せると仮定する。そのとき、(8)式と同様に

$$\overline{\delta u} \coloneqq \epsilon\bar{\psi}(x)$$

と定義すると

---

[3] すなわち、変換：$(x, u) \mapsto (x^*, u^*)$ において、曲面 $u = u(x)$ 上の点は

$$\big(x, u(x)\big) \mapsto \big(x + \Delta x(x), u(x) + \Delta u(x)\big)\ \Big(= \big(x^*, u^*(x^*)\big)\Big)$$

と変換される（$x$ を曲面上の点を表すパラメータとして考えている）。

$$\begin{aligned}\Delta u &= u^*(x^*) - u(x) = [u^*(x^*) - u^*(x)] + [u^*(x) - u(x)] \\ &= u^*(x+\Delta x) - u^*(x) + \overline{\Delta u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x)\Delta x_i + o(|\Delta x|) + \overline{\Delta u} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x)[\epsilon\varphi_i(x) + o(\epsilon)] + o(\epsilon) + \epsilon\bar{\psi}(x) + o(\epsilon)\end{aligned}$$

したがって

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^*}{\partial x_i}\delta x_i + \overline{\delta u} + o(\epsilon) \tag{9}$$

が得られる。更に

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}[u(x) + \epsilon\psi(x) + o(\epsilon)] = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \epsilon\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) + o(\epsilon) \tag{i}$$

より

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x)[\epsilon\varphi_i(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)[\epsilon\varphi_i(x)] + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)[\epsilon^2\varphi_i(x)] + o(\epsilon^2)$$

したがって

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\delta x_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\delta x_i + o(\epsilon)$$

であるから

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\delta x_i + \overline{\delta u} + o(\epsilon)$$

となる。これと(7)式を比較すると

$$\delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\delta x_i + \overline{\delta u} \tag{10}$$

が得られる。あるいは

$$\epsilon\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\epsilon\varphi_i + \epsilon\bar{\psi}$$

より

$$\psi = \bar{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi_i \tag{11}$$

である。

## 37.3 Calculation of $\delta u_{x_i}$

本節では

$$\Delta u_{x_i} \coloneqq \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

なる量の表現を導出する。その線型部分 $\delta u_{x_i}$ は後に増分 $J[u^*(x^*)] - J[u(x)]$ を計算する

際に必要になる。

まず、(6)式：$x_i^* = x_i + \epsilon\varphi_i(x) + o(\epsilon)$ より

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial x_i} = \delta_{ik} + \epsilon\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + o(\epsilon) \tag{12}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k^*}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*} = \sum_{k=1}^{n}\left[\delta_{ik} + \epsilon\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + o(\epsilon)\right]\frac{\partial}{\partial x_k^*}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i^*} + \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*} + o(\epsilon)$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} = \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*} + o(\epsilon) \tag{13}$$

が得られる。

次に

$$\Delta u_{x_i} = \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i^*}[u^*(x^*) - u(x^*)] + \frac{\partial}{\partial x_i}[u(x^*) - u(x)] + \left(\frac{\partial}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u(x^*)$$

と表して、各項の表現について順に考える。

関数 $\bar{\psi}$ の定義：$u^*(x) - u(x) = \epsilon\bar{\psi}(x) + o(\epsilon)$ より

$$u^*(x^*) - u(x^*) = \epsilon\bar{\psi}(x^*) + o(\epsilon)$$

であるから、(13)式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*}[u^*(x^*) - u(x^*)] = \frac{\partial}{\partial x_i^*}[\epsilon\bar{\psi}(x^*) + o(\epsilon)]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}[\epsilon\bar{\psi}(x^*) + o(\epsilon)] - \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}[\epsilon\bar{\psi}(x^*) + o(\epsilon)] + o(\epsilon)$$
$$= \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}(x^*) + o(\epsilon) = \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}(x + \Delta x) + o(\epsilon) \tag{14}$$
$$= \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}[\bar{\psi}(x) + O(\Delta x)] + o(\epsilon)$$
$$= \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}(x) + o(\epsilon)$$

が得られる。また（$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ とすると）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}[u(x^*)-u(x)] &= \frac{\partial}{\partial x_i}[u(x+\Delta x)-u(x)]\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\Delta x_k + o(|\Delta x|)\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\epsilon\varphi_k(x)+o(\epsilon)\right]\\ &= \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi_k(x)+o(\epsilon)\end{aligned}\tag{15}$$

および

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}-\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u(x^*) &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}u(x^*)+o(\epsilon)\\ &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}u(x+\Delta x)+o(\epsilon)\\ &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}[u(x)+O(\Delta x)]+o(\epsilon)\\ &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}u(x)+o(\epsilon)\\ &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)-\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k^*}u(x)+o(\epsilon)\right]+o(\epsilon)\\ &= -\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)+o(\epsilon)\end{aligned}\tag{16}$$

が成り立つ。

以上より

$$\begin{aligned}\Delta u_{x_i} &= \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\\ &= \epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}(x)+\epsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi_k(x)-\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)+o(\epsilon)\\ &= \epsilon\left[\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}(x)\varphi_k(x)\right]+o(\epsilon)\end{aligned}\tag{17}$$

が得られる。すなわち

$$\Delta u_{x_i} = \frac{\partial\epsilon\bar{\psi}}{\partial x_i}(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}(x)\epsilon\varphi_k(x)+o(\epsilon)$$

であるから、$\Delta u_{x_i}$ の線型部分 $\delta u_{x_i}$ は

$$\delta u_{x_i} = \frac{\partial\overline{\delta u}}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\delta x_k\tag{18}$$

である。

37.4 Caluculation of $\delta J$

**Theorem 1.** $C^1(\mathbb{R}^n)$ 上の汎関数[4]

$$J[u]=\int_R F(x,u,\nabla u)dx \quad \left(u\in C^1(\mathbb{R}^n)\right) \tag{19}$$

の変換[5]

$$\begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x,u,\nabla u;\epsilon)=x_i+\epsilon\varphi_i(x,u,\nabla u)+o(\epsilon) \quad (i=1,\dots,n),\\ u^* &= \Psi(x,u,\nabla u;\epsilon)=u+\epsilon\psi(x,u,\nabla u)+o(\epsilon), \quad \epsilon\to 0 \end{aligned} \tag{20}$$

に対応する変分 $\delta J[u;*]:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は

$$\delta J[u;\epsilon]=\epsilon\int_R\left(F_u-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\bar{\psi}dx+\epsilon\int_R\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{u_{x_i}}\bar{\psi}+F\varphi_i\right)dx \tag{21}$$

と表される[6]。ただし

$$\bar{\psi}=\psi-\sum_{i=1}^n u_{x_i}\varphi_i$$

である[7]。

**Proof**

汎関数 $J$ の変分 $\delta J[u;\epsilon]$ は、変換：$(x,u)\mapsto(x^*,u^*)$ による汎関数の増分

$$\Delta J := J[u^*(x^*)]-J[u(x)] \tag{22}$$

の $\epsilon\in\mathbb{R}$ に関する線型部分として定義される。そのとき

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{R^*}F(x^*,u^*,\nabla^*u^*)dx^*-\int_R F(x,u,\nabla u)dx\\ &= \int_R\left[F(x^*,u^*,\nabla^*u^*)\frac{\partial(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}-F(x,u,\nabla u)\right]dx \end{aligned} \tag{23}$$

であるが、変換：$(x,u)\mapsto(x^*,u^*)$ の Jacobian $\partial(x_1^*,\dots,x_n^*)/\partial(x_1,\dots,x_n)$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} &= \begin{vmatrix} 1+\epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \epsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & 1+\epsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \epsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \epsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \epsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & 1+\epsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\\ &= 1+\epsilon\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}+o(\epsilon) \end{aligned}$$

---

[4] $F\in C^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n+1})$ で $R\subset\mathbb{R}^n$ はコンパクトである。

[5] $\epsilon\in\mathbb{R},\ \Phi_i(x,u,\nabla u;*),\Psi(x,u,\nabla u;*)\in C^1(\mathbb{R}),\ \varphi_i\big(*,u(*),\nabla u(*)\big),\psi\big(*,u(*),\nabla u(*)\big)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ である。

[6] ここで $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$ であるとする。

[7] $\delta J[u;\epsilon]=\epsilon\int_R\left(F_u-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\bar{\psi}dx+\epsilon\int_R\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{u_{x_i}}\psi-F_{u_{x_i}}\sum_{k=1}^n u_{x_k}\varphi_k+F\varphi_i\right)dx$
$=\int_R\left(F_u-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\overline{\delta u}dx+\epsilon\int_R\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left[F_{u_{x_i}}\delta u-\sum_{k=1}^n\left(F_{u_{x_i}}u_{x_k}-F\delta_{ik}\right)\delta x_k\right]dx$

であるから

$$\Delta J = \int_R \left[ F(x^*, u^*, \nabla^* u^*) \left( 1 + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + o(\epsilon) \right) - F(x, u, \nabla u) \right] dx \tag{24}$$

となる。さらに、(20)式および(17)式より

$$\Delta x_i \coloneqq x_i^* - x_i = \epsilon \varphi_i + o(\epsilon),$$

$$\Delta u \coloneqq u^* - u = \epsilon \psi + o(\epsilon),$$

$$\Delta(\nabla u)_i \coloneqq \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \Delta u_{x_i} = \epsilon \left( \bar{\psi}_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_i x_k} \varphi_k \right) + o(\epsilon)$$

とおくと

$$\begin{aligned} F(x^*, u^*, \nabla^* u^*) &= F\big(x + \Delta x, u + \Delta u, \nabla u + \Delta(\nabla u)\big) \\ &= F + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \Delta x_i + F_u \Delta u + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \Delta u_{x_i} + o(\epsilon) \\ &= F + \epsilon \left[ \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \varphi_i + F_u \psi + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \left( \bar{\psi}_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_i x_k} \varphi_k \right) \right] + o(\epsilon) \end{aligned}$$

であるから、結局

$$\begin{aligned} \Delta J &= \epsilon \int_R \left[ F \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \varphi_i + F_u \psi + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \left( \bar{\psi}_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_i x_k} \varphi_k \right) \right] dx + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \int_R \left[ F \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \varphi_i + F_u \left( \bar{\psi} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \varphi_i \right) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \left( \bar{\psi}_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_i x_k} \varphi_k \right) \right] dx + o(\epsilon) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \delta J &= \epsilon \int_R \left( F_u \bar{\psi} + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \bar{\psi}_{x_i} \right) dx \\ &\quad + \epsilon \int_R \left[ F \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \varphi_i + F_u \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \left( \sum_{k=1}^{n} u_{x_i x_k} \varphi_k \right) \right] dx \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。ここで

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F \varphi_i) = \left( F_{x_i} + F_u u_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}} u_{x_k x_i} \right) \varphi_i + F \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$$

および

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} \right) = \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \bar{\psi} + F_{u_{x_i}} \bar{\psi}_{x_i}$$

であるから、(25)式は

$$\delta J = \epsilon \int_R \left( F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \bar{\psi} dx + \epsilon \int_R \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F \varphi_i \right) dx \tag{26}$$

と表される。

■

**Remark 1.** (20)式の変換において $x_i^* = x_i\ (i = 1, \dots, n)$ となる特別の場合には、$\varphi_i = 0\ (i = 1, \dots, n)$ したがって $\bar{\psi} = \psi - \sum_{i=1}^n u_{x_i}\varphi_i = \psi$ であるから

$$\delta J[u;\epsilon] = \epsilon \int_R \left( F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} \right) \psi dx + \epsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \psi \right) dx$$

となる。

**Remark 2.** $u = u(x)$ が汎関数 $J[u]$ の極値を与える場合には、Euler 方程式

$$F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

が満たされるから、(21)式は

$$\begin{aligned}
\delta J[u;\epsilon] &= \epsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F\varphi_i \right) dx \\
&= \epsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \psi - F_{u_{x_i}} \sum_{k=1}^n u_{x_k}\varphi_k + F\varphi_i \right) dx \\
&= \epsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ F_{u_{x_i}} \psi - \sum_{k=1}^n \left( F_{u_{x_i}} u_{x_k} - F\delta_{ik} \right) \varphi_k \right] dx
\end{aligned}$$

となる。

**Remark 3.** $[C^1(\mathbb{R}^n)]^m$ 上の汎関数

$$J[u] = \int_R F(x, u, \nabla u) dx \quad (u \in [C^1(\mathbb{R}^n)]^m) \tag{27}$$

と変換

$$\begin{aligned}
x_i^* &= \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = x_i + \epsilon\varphi_i(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, n), \\
u_i^* &= \Psi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = u_i + \epsilon\psi_i(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, m)
\end{aligned} \tag{28}$$

を考えると、(21)式は

$$\begin{aligned}
\delta J[u;\epsilon] &= \epsilon \int_R \sum_{j=1}^m \left( F_{u_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right) \bar{\psi}_j \, dx \\
&\quad + \epsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \bar{\psi}_j + F\varphi_i \right) dx
\end{aligned} \tag{29}$$

と一般化される。ただし

$$\bar{\psi}_j = \psi_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi_i \quad (j = 1, \dots, m)$$

である。

**Remark 4.** (28)式の変換の代わりに、さらに一般化した変換

$$x_i^* = \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = x_i + \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k \varphi_i^{(k)}(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$u_i^* = \Psi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = u_i + \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k \psi_i^{(k)}(x, u, \nabla u) + o(|\epsilon|) \quad (i = 1, \dots, m)$$

（ただし $\epsilon \coloneqq (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \mathbb{R}^r$）を考えると、(29)式はさらに

$$\delta J[u; \epsilon] = \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k \int_R \sum_{j=1}^{m} \left( F_{u_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right) \bar{\psi}_j^{(k)} \, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k \int_R \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \bar{\psi}_j^{(k)} + F \varphi_i^{(k)} \right) dx$$

と一般化される。ただし

$$\bar{\psi}_j^{(k)} = \psi_j^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi_i^{(k)} \quad (j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r)$$

である。

## 37.5 Noether's theorem

**Definition** $C^1(\mathbb{R}^n)$ 上の汎関数

$$J[u] = \int_R F(x, u, \nabla u) dx \quad \left( u \in C^1(\mathbb{R}^n) \right) \tag{30}$$

と変換

$$\begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x, u, \nabla u) \quad (i = 1, \dots, n), \\ u^* &= \Psi(x, u, \nabla u) \end{aligned} \tag{31}$$

が与えられているものとし、この変換によって平面 $\sigma: u = u(x)$ は平面 $\sigma^*: u^* = u^*(x^*)$ に移るものとする。そのとき、$J[\sigma^*] = J[\sigma]$ すなわち

$$\int_{R^*} F(x^*, u^*, \nabla^* u^*) dx^* = \int_R F(x, u, \nabla u) dx$$

が成り立つとき、またそのときに限り、(30)式の汎関数は(31)式の変換に対して不変（invariant）であるという。

**Theorem 2 (Noether)**　$C^1(\mathbb{R}^n)$ 上の汎関数[8]

$$J[u] = \int_R F(x, u, \nabla u) dx \quad \left(u \in C^1(\mathbb{R}^n)\right) \tag{32}$$

が変換[9]

$$\begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) = x_i + \epsilon \varphi_i(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, n), \\ u^* &= \Psi(x, u, \nabla u; \epsilon) = u + \epsilon \psi(x, u, \nabla u) + o(\epsilon) \end{aligned} \tag{33}$$

に対して任意の $R \subset \mathbb{R}^n$ において不変であるならば、汎関数 $J[u]$ の極値を与える任意の $u = u(x)$ に対して[10]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F \varphi_i \right) = 0 \tag{34}$$

が成り立つ。ただし

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \varphi_i$$

である[11]。

**Proof**

Theorem 1 より汎関数 $J[u]$ の(33)式で与えられる変換に対する変分は

$$\delta J[u; \epsilon] = \epsilon \int_R \left( F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} \right) \bar{\psi} dx + \epsilon \int_R \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F \varphi_i \right) dx$$

ただし

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \varphi_i$$

と表される。一方、$u = u(x)$ が汎関数 $J[u]$ の極値を与えるならば、その Euler 方程式

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

を満たすから、そのような $u = u(x)$ において上記の変分は

$$\delta J[u; \epsilon] = \epsilon \int_R \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F \varphi_i \right) dx$$

となる。さらに、汎関数 $J[u]$ は(33)式で与えられる変換に対して不変であるから

$$0 = J[u^*(x^*)] - J[u(x)] = \delta J[u(x); \epsilon] = \epsilon \int_R \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \bar{\psi} + F \varphi_i \right) dx$$

---

[8] $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ である。

[9] $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\Phi_i(x, u, \nabla u; *), \Psi(x, u, \nabla u; *) \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi_i\left(*, u(*), \nabla u(*)\right), \psi\left(*, u(*), \nabla u(*)\right) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ である。

[10] $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ であるとする。

[11] これを(34)式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \left( \psi - \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} \varphi_j \right) + F \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F_{u_{x_i}} \psi + F \varphi_i - F_{u_{x_i}} \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} \varphi_j \right) = 0$$

が得られる。

これがすべての $R \subset \mathbb{R}^n$ において成り立つことから

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{u_{x_i}}\bar{\psi} + F\varphi_i\right) = 0$$

が得られる。

■

（Whitham の平均 Lagrange の場合）

汎関数

$$J[\theta, a] = \int_R \mathcal{L}(\theta_t, \theta_x, a)dt\,dx$$

と変換

$$t^* = \Phi_0(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a; \epsilon) = t + \epsilon\varphi_0(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a) + o(\epsilon)$$
$$x_i^* = \Phi_i(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a; \epsilon) = x_i + \epsilon\varphi_i(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a) + o(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$\theta^* = \Psi_1(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a; \epsilon) = \theta + \epsilon\psi_1(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a) + o(\epsilon),$$
$$a^* = \Psi_2(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a; \epsilon) = a + \epsilon\psi_2(t, x, \theta, \theta_t, \theta_x, a) + o(\epsilon)$$

を考えると、汎関数の変分は(29)式より

$$\begin{aligned}\delta J[\theta, a; \epsilon] = \epsilon \int_R \Bigg[&\left(\mathcal{L}_\theta - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)}\right)\bar{\psi}_1 \\ &+ \left(\mathcal{L}_a - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)}\right)\bar{\psi}_2\Bigg]dtdx \\ &+ \epsilon\int_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)}\bar{\psi}_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)}\bar{\psi}_2 + \mathcal{L}\varphi_0\right)dtdx \\ &+ \epsilon\int_R \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)}\bar{\psi}_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)}\bar{\psi}_2 + \mathcal{L}\varphi_i\right)dtdx\end{aligned}$$

ただし

$$\bar{\psi}_1 = \psi_1 - \frac{\partial \theta}{\partial t}\varphi_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\varphi_i, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2 - \frac{\partial a}{\partial t}\varphi_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi_i$$

となる。

特に、時間に関する平行移動の場合には

$$t^* = t + \epsilon$$
$$x_i^* = x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$\theta^* = \theta,$$
$$a^* = a$$

すなわち $\varphi_0 = 1, \varphi_i = \psi_1 = \psi_2 = 0$ であり、そのとき

$$\theta^*(x^*, t^*) = \theta(x, t),\ \ a^*(x^*, t^*) = a(x, t)$$

より

$$\theta^*_{x_i^*}(x^*, t^*) = \sum_{k=1}^{n} \theta^*_{x_k}(x^*, t^*) \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} = \theta^*_{x_i}(x^*, t^*) = \theta_{x_i}(x, t),$$

$$a^*_{x_i^*}(x^*, t^*) = \sum_{k=1}^{n} a^*_{x_k}(x^*, t^*) \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} = a^*_{x_i}(x^*, t^*) = a_{x_i}(x, t)$$

であるから

$$\begin{aligned}
J[\theta^*(x^*, t^*), a^*(x^*, t^*)] &= \int_{R^*} \mathcal{L}\big(\theta^*_{t^*}(x^*, t^*), \theta^*_{x^*}(x^*, t^*), a^*(x^*, t^*)\big) dt^*\, dx^* \\
&= \int_{R^*} \mathcal{L}\big(\theta_t(x, t), \theta_x(x, t), a(x, t)\big) dt^*\, dx^* \\
&= \int_{R} \mathcal{L}\big(\theta_t(x, t), \theta_x(x, t), a(x, t)\big) \frac{\partial(x^*, t^*)}{\partial(x, t)}\, dt\, dx \\
&= J[\theta(x, t), a(x, t)]
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、Noether の定理より

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_t}\left(\psi_1 - \theta_t \varphi_0 - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i} \varphi_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t}\left(\psi_2 - a_t \varphi_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{x_i} \varphi_i\right) + \mathcal{L}\varphi_0\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{x_i}}\left(\psi_1 - \theta_t \varphi_0 - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i} \varphi_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{x_i}}\left(\psi_2 - a_t \varphi_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{x_i} \varphi_i\right) + \mathcal{L}\varphi_i\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_t}\theta_t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t} a_t + \mathcal{L}\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{x_i}}\theta_t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{x_i}} a_t\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathcal{L}_{\theta_t}\theta_t + \mathcal{L}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\mathcal{L}_{\theta_{x_i}}\theta_t\right) = 0
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_\omega \omega - \mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\mathcal{L}_{k_i}\omega\right) = 0$$

が得られる。

同様に、空間に関する $i$ 方向の平行移動の場合には

$$t^* = t$$

$$x_i^* = x_i + \epsilon,$$

$$x_k^* = x_k \quad (k \neq i),$$

$$\theta^* = \theta,$$

$$a^* = a$$

すなわち $\varphi_i = 1, \varphi_0 = \varphi_k = \psi_1 = \psi_2 = 0$ であり、そのとき同様に

$$J[\theta^*(x^*, t^*), a^*(x^*, t^*)] = J[\theta(x, t), a(x, t)]$$

であるから、Noetherの定理より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_t}\left(\psi_1-\theta_t\varphi_0-\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}\varphi_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_t}\left(\psi_2-a_t\varphi_0-\sum_{i=1}^{n}a_{x_i}\varphi_i\right)+\mathcal{L}\varphi_0\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_{x_i}}\left(\psi_1-\theta_t\varphi_0-\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}\varphi_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_{x_i}}\left(\psi_2-a_t\varphi_0-\sum_{i=1}^{n}a_{x_i}\varphi_i\right)\right.$$
$$\left.+\mathcal{L}\varphi_i\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_t}\theta_{x_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_t}a_{x_j}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_{x_i}}\theta_{x_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_{x_i}}a_{x_j}+\mathcal{L}\delta_{ij}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathcal{L}_{\theta_t}\theta_{x_j}+\mathcal{L}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\mathcal{L}_{\theta_{x_i}}\theta_{x_j}+\mathcal{L}\delta_{ij}\right)=0$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L}_\omega k_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\mathcal{L}_{k_i}k_j+\mathcal{L}\delta_{ij}\right)=0$$

が得られる。