

ナヴィエーストークス方程式 クレイ懸賞問題のいま

小園 英雄

東北大学大学院理学研究科

数学セミナー 2010 年 2 月号特集「ナヴィエーストークス方程式」より

2000 年 5 月にアメリカのクレイ研究所は、21 世紀の始まりとともに次の千年（ミレニアム）に取り組むべき数学の 7 つの未解決問題への挑戦を宣言した。丁度 100 年前の 1900 年にパリで開かれた国際数学会議においてヒルベルトが提唱した 23 の問題を今世紀に引き継ぐものといえよう。クレイ研究所が提唱した 7 つの問題には、それぞれその解決に百万ドルの懸賞金がかけられている。その金額の多寡、あるいはもっと根本的に賞金付きの是非はさておき、いずれも数学において取り組むべき重要な課題であることには疑いの余地がない。7 つの問題のうち「ポアンカレ予想」はすでに肯定的に解決され、残る 6 問が未解決である。本稿では、その 6 難題のうちのひとつである「ナヴィエーストークス方程式の解の存在問題」について、2000 年の提唱に至る経緯とこれまでの取組、及び研究の現状について解説する。

1 ナヴィエーストークス方程式の初期値問題

ナヴィエーストークス方程式は流体力学における基礎方程式である。ここでは、簡単のため非圧縮性粘性流体の運動を 3 次元空間 \mathbb{R}^3 全体で考える。 $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$, $p = p(x, t)$ をそれぞれ、座標 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, 時刻 $t > 0$ における流体の速度ベクトルと圧力とする。このとき、 $\{u, p\}$ はナヴィエーストークス方程式

$$(N-S) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = a, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

に従う。ここで $a = a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ は与えられた初期速度ベクトルである。記号の意味については、この特集号の藤田宏先生の解説を参照されたい。さて、時刻 $t = 0$ で初期値 a を与えて (N-S) の解 $\{u, p\}$ を求めることが問題となる。これをナヴィエーストークス方程式のコーシー問題、または初期値問題という。

(N-S) のコーシー問題についての関心事は次にあげる問いである。

- (i) 初期値 $a = a(x)$ に対して, ある $T > 0$ が存在して, (N-S) は $t \in (0, T)$ で定義された解 $\{u(t), p(t)\}$ を有するか?
- (ii) その様な解は唯一つか? また, 変数 $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ で何階でも微分可能か?
- (iii) $\{v, q\}$ をいまひとつの初期値 $b = b(x)$ に対する (N-S) の解とすると, a, b が十分近ければ二つの解 $\{u(t), p(t)\}, \{v(t), q(t)\}$ も時間 $(0, T)$ において近いか?
- (iv) 上記において $T = \infty$ ととれるか?

(i) は解の存在, (ii) は解の一意性と正則性, (iii) は初期値に対する解の連続依存性に関する問題である. この3つの問題が肯定的であるとき, (N-S) のコーシー問題は時間局所的に適切 (locally well-posed) であるという. また, これらに加えて更に (iv) が成り立つとき, 時間大域的に適切 (globally well-posed) であるという. ナヴィエーストークス方程式に限らず, 偏微分方程式論においては, 与えられた方程式のコーシー問題が適切であるかどうかを調べるのが主要な研究対象となる. 特に, 非線形偏微分方程式に対しては時間大域的適切性を得ることが多くの数学者の目標とするところである. クレイ研究所によって提唱された懸賞問題は, 以下のとおりである.

ミレニアム問題. 任意に与えられた初期値 a に対して, (N-S) は時間大域的な一意正則な解 $\{u, p\}$ を有するか?

ここで大切なのは, 初期値 a が任意にとれるか? ということである. 後に詳しく述べるように, "任意に" を "大きく" と言い換えてもよい. (N-S) に関するミレニアム問題についてはこの研究の大家である藤田-岡本 [9], 岡本 [21] による優れた解説がある. 問題の提唱自体については, フェファーマン [5] を参照されたい.

2 ミレニアム問題に対する2つのアプローチ

時間変数を含む偏微分方程式の現代的な取扱いでは, 解 $u(x, t)$ を, 各時刻 t で定義された $x \in \mathbb{R}^3$ を変数とする関数への写像とみなす. すなわち, X を \mathbb{R}^3 上で定義された適当な関数空間とするとき, $u(x, t)$ を $t \in [0, T] \mapsto u(\cdot, t) \in X$ なる写像と捉える. 解を求める集合としては, X に値をとる $[0, T]$ 上の連続関数空間 $C([0, T]; X)$ や, s -乗可積分空間 $L^s(0, T; X)$ が基礎となる. 通常 X はバナッハ空間であり, そのノルムを $\|\cdot\|_X$ と書くとき, $C([0, T]; X), L^s(0, T; X)$ はそれぞれ $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X, (\int_0^T \|u(t)\|_X^s dt)^{1/s}$ * によってまたバナッハ空間となる.

2.1 弱解の正則性からの挑戦

偏微分方程式の研究の歴史に従えば, いきなり正則な解を見出そうとするのではなく, まずは微分可能性が低い "弱解" を構成し, 次にその微分可能性を証明するといった方法が考えられる (N-S) の場合, 弱解はルレイによって構成された.

*これらの関数空間については, 藤田-黒田-伊藤 [7, 2.2, 2.3 節] を参照されたい.

定理 1 (ルレイ [18]) 任意の初期値 $a \in L_\sigma^2$ [†] に対して,

$$(2.1) \quad u \in L^\infty(0, \infty; L_\sigma^2), \quad \nabla u \in L^2(0, \infty; L^2)$$

であって, (N-S) を $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ において超関数の意味[‡] で満たすものが存在する.

一般的に, 偏微分方程式を超関数の意味で満たす解を弱解という. (N-S) に関して, 弱解の利点は, 初期値が大きくても, またなめらかな関数でなくても, 時間大域的に解を構成できることである. しかし欠点もあり, その一意性や正則性については未解決である. すなわち, 解を求める関数空間として (2.1) は広いため有効であるが, 与えられた初期値 $a \in L_\sigma^2$ に対して, 唯一とつ存在することを示すには広すぎる. 実際, 弱解の一意性と正則性が成り立つことを保証するものとして次の定理がある.

定理 2 $a \in L_\sigma^2$ とする. u を

$$(2.2) \quad u \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2), \quad \nabla u \in L^2(0, T; L^2)$$

となる (N-S) の $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 上の弱解とする. $2 \leq s \leq \infty, 3 \leq r \leq \infty$ であって条件 $2/s + 3/r = 1$ を満たす指数 s, r に対して

$$(2.3) \quad u \in L^s(0, T; L^r)$$

であれば, u は (N-S) のただひとつの弱解であり, かつ $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ である.

関数空間 (2.3) はセリンのクラスと呼ばれている ([22]). 残念ながら, (2.3) は弱解のクラス (2.2) より狭い. 従って, 弱解を構成して, その正則性を証明しようとする試みは, 今のところ成功はしていない. しかし, 定理 2 は, 弱解の一意正則性を示すには, それよりはるかに緩和された条件である (2.3) を示しさえすればよいことを主張している. 実は, セリン [22] による一意正則性のクラスは $2/s + 3/r < 1$ であったが, その後, 増田 [19], ゴールフォン・パール [23], 儀我 [10] らによって, $2/s + 3/r = 1$ (ただし, $3 < r < \infty$) の場合も正しいことが明らかにされた. そのために 20 年の歳月が費やされたことを注意しておきたい. 最後に $r = 3, s = \infty$ の場合, すなわち

$$u \in L^\infty(0, T; L^3)$$

なるクラスにおける弱解の正則性の問題[§] が残されていた. この問題は, エスカリザ-セレギン-スヴェラック [4] によって肯定的に解決されたが, それはクレイ研究所の懸賞問題が提唱された 3 年後であった.

(2.3) はスケール不変という概念と密接に関係している. いま $\{u, p\}$ を $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ 上の (N-S) の解とすると, $\lambda > 0$ をパラメーターとして $u_\lambda(x, t) \equiv \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), p_\lambda(x, t) \equiv \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ で定義

[†]以下, 添え字の σ は発散量がゼロ $\operatorname{div} a = 0$ を表す

[‡]等式 $\int_0^\infty \{-(u, \partial_t \Phi) + (\nabla u, \nabla \Phi) + (u \cdot \nabla u, \Phi)\} dt = (a, \Phi(\cdot, 0))$ が, $\Phi(\cdot, t) \in C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3)$ かつ十分大きな $T > 0$ に対して $\Phi(\cdot, t) = 0, \forall t \geq T$ をみたすすべての $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$ について成り立つ. ただし, $(u, v) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_j(x) v_j(x) dx$ は $u, v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ の内積を表す.

[§]一意性については, 筆者-ゴール [16] による.

される $\{u_\lambda, p_\lambda\}$ もまた, $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ 上の (N-S) の解であることが容易に検証できる. このような性質を (N-S) に関するスケール変換則という. X をノルム $\|\cdot\|_X$ をもつバナッハ空間として, 時空の関数空間 $L^s(0; \infty; X)$ を考える. $u \in L^s(0; \infty; X)$ に対して $\|u\|_{L^s(0; \infty; X)} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_X^s dt\right)^{1/s}$ と定める. $L^s(0; \infty; X)$ が (N-S) に関してスケール不変な関数空間であるとは, 等式 $\|u_\lambda\|_{L^s(0; \infty; X)} = \|u\|_{L^s(0; \infty; X)}$ がすべての $\lambda > 0$ で成り立つことと定義する. 容易に計算できるように, $X = L^r$ の場合,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{L^s(0; \infty; L^r)} &= \left(\int_0^\infty \|u_\lambda(\cdot, t)\|_{L^r}^s dt\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_\lambda(x, t)|^r dx\right)^{\frac{s}{r}} dt\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \lambda \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(\lambda x, \lambda^2 t)|^r dx\right)^{\frac{s}{r}} dt\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \lambda^{1 - \left(\frac{2}{s} + \frac{3}{r}\right)} \|u\|_{L^s(0; \infty; L^r)} \end{aligned}$$

であるから, $L^s(0; \infty; L^r)$, $2/s + 3/r = 1$ は (N-S) に関してスケール不変な関数空間である. (N-S) に限らず, 一般に非線形偏微分方程式が与えられたとき, その方程式に固有のスケール不変な関数空間で解を考察することの重要性が経験的に知られている. これを藤田・加藤の原理という.

ミレニアム問題提唱後も一意正則性が成り立つクラスとして, (2.3) を拡張しようという研究の流れは未だ健在である. そこで最近盛んに研究されている斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{p,q}^s$ と斉次トリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}_{p,q}^s$ を導入しよう. $\phi = \phi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ を次の 3 つの性質を満たす関数とする.

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\text{supp } \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3; 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \phi(\xi) > 0 \quad 1/2 < |\xi| < 2 \text{ のとき,} \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1 \quad \xi \neq 0 \text{ のとき} \end{aligned}$$

$\hat{\varphi}_k(\xi) = \phi(2^{-k}\xi)$, $\|k = 0, \pm 1, \dots$ によって関数列 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を定める. (2.4) により, 任意の $f \in \mathcal{S}'$ は $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k * f$ と表現できる. これを関数 f のリトルウッド-ペイリー分解という.

このとき, 斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{p,q}^s$ と斉次トリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}_{p,q}^s$ は次のように定義される.

$$\dot{B}_{p,q}^s = \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \equiv \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{L^p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

$^{\S}s = \infty$ のときは, $\|u\|_{L^s(0; \infty; X)} = \sup_{0 < t < \infty} \|u(t)\|_X$ とする.

$\| \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$ は関数 f のフーリエ変換を表す

$^{\dagger\dagger} \mathcal{S}$ は急減少関数の集合を表す. すなわち, $f \in \mathcal{S}$ であるとは, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ であって, 任意の非負整数 m , 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に対して, $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x|^m |\partial^\alpha f(x)| < \infty$. ここで, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$. \mathcal{S} の双対空間を \mathcal{S}' で表し, 緩増加超関数の空間という.

$^{\dagger\dagger\dagger} f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^3$ を関数 f, g の合成積という.

$$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty,$$

$$\dot{F}_{p,q}^s = \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{ks} |\varphi_k * f(x)|)^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$$

$$\dot{F}_{\infty,q}^s = \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{F}_{\infty,q}^s} \equiv \sup_{Q:\text{dyadic}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sum_{k=-\log_2 l(Q)}^{\infty} (2^{ks} |\varphi_k * f(x)|)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty\},$$

$$s \in \mathbb{R}, 1 \leq q \leq \infty$$

ここで、 \mathcal{P} は \mathbb{R}^3 上の多項式全体^{††}を表す。最後の $\dot{F}_{\infty,q}^s$ の定義において、上限は \mathbb{R}^3 における 2 進立方体 (dyadic cube) の族 $Q = Q_{\nu m} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2^{-\nu} m_i \leq x_i \leq 2^{-\nu}(m_i + 1), i = 1, 2, 3\}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ 全体においてとる。ただし、 $|Q|$, $l(Q)$ はそれぞれ立方体の体積、一辺の長さである。また $q = \infty$ のときは、それぞれ $k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z} \cap [-\log_2 l(Q), \infty)$ に関しての上限をとるものと解釈する。

これらの空間と通常ルベグ空間 L^p , 斉次ソボレフ空間 $\dot{H}_p^s = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{\dot{H}_p^s} \equiv \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p} < \infty\}$ との包含関係については、以下の命題が知られている。

命題 1 (1) $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ のとき、

$$\dot{B}_{p,q_1}^s \subset \dot{B}_{p,q_2}^s, \quad \dot{F}_{p,q_1}^s \subset \dot{F}_{p,q_2}^s$$

が成り立つ。

(2) $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \dot{B}_{p,q}^s &\subset \dot{F}_{p,q}^s \subset \dot{B}_{p,p}^s, & 1 < q \leq p < \infty \text{ のとき} \\ \dot{B}_{p,p}^s &\subset \dot{F}_{p,q}^s \subset \dot{B}_{p,q}^s, & 1 < p \leq q < \infty \text{ のとき} \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、 $\dot{B}_{p,p}^s = \dot{F}_{p,p}^s$ が成り立つ。

(3) $s > 0, 1 < p < \infty$ のとき、 $\dot{F}_{p,2}^s = \dot{H}_p^s$ が成り立つ。 $s = 0, p = 1, \infty$ のとき、 $\dot{F}_{1,2}^0 = \mathcal{H}^1$, $F_{\infty,2}^0 = BMO$ が成り立つ。ただし \mathcal{H}^1 , BMO は、それぞれハーディ空間、平均振動有界の関数空間*を表す。

^{††}定義の $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$, $\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}$ は、それぞれ $\dot{B}_{p,q}^s$, $\dot{F}_{p,q}^s$ におけるセミノルムを与える。実際、 $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0$ または $\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} = 0$ より、 $\text{supp } \hat{f} = \{0\}$ が従い、 f は \mathbb{R}^n 上の多項式である。

* $\psi \in \mathcal{S}$ を $\int_{\mathbb{R}^3} \psi dx = 1$ なる関数とし、 $f \in L^1$ に対して $Mf(x) = \sup_{t>0} |\psi_t * f(x)|$ と定める。ただし、 $\psi_t(x) = t^{-n} \psi(x/t)$ 。 $Mf \in L^1$ であるとき、 $f \in \mathcal{H}^1$ と定義する。また、すべての球 $B \subset \mathbb{R}^3$ に対して $f \in L^1(B)$ なる関数 f が、条件

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B |B|^{-1} \int_B |f(x) - f_B| dx < \infty$$

を満たすとき、 $f \in BMO$ と定義する。ただし、 $f_B = |B|^{-1} \int_B f(y) dy$ 。 $(\mathcal{H}^1)^* = BMO$ が知られている。これらについては、Stein[24, III, IV] を参照されたい。

命題 1 の証明については、例えばフレイジャー–ジャウェルス–ワイス [6] を参照されたい。斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{p,q}^s$ 、斉次トリebel–リゾルキン空間 $\dot{F}_{p,q}^s$ は、従来のルベグ空間 L^p やソボレフ空間 \dot{H}_p^s に第 3 の指数 $q \in [0, \infty]$ を導入してより細かく見たものである。これらの空間は、関数空間それ自身の考察に加えて補間空間論と共に 1960 年代に盛んに研究されていたが、当初は偏微分方程式への応用はそれほど期待されていなかった。しかし、1990 年代になって非線形偏微分方程式の適切性の解明に積極的に導入され、今日その有用性は広く認識されている。弱解の正則性として、これまでのところ最も一般的な主張は以下の定理である。

定理 3 ([17]) $a \in L_\sigma^2$ とし、 u を (2.2) に属する (N-S) の $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 上の弱解であるとする。もし、 $0 \leq \alpha < 1$, $2/s = 1 - \alpha$ なる指数 s, α に対して

$$(2.5) \quad u \in L^s(0, T; \dot{F}_{\infty, \infty}^{-\alpha})$$

を満たすならば、 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ が成り立つ。

注意 $3 < r \leq \infty$ ならば、連続な埋め込み $L^r \subset \dot{F}_{\infty, \infty}^{-3/r}$ が成り立つ。従って、 u が (2.3) に属するとき、 $\alpha = 3/r$ とおくことにより、 u は (2.5) にも属する。故に、定理 3 により u の正則性が得られる。すなわち、少なくとも $3 < r \leq \infty$ の場合の弱解の正則性については、定理 2 は定理 3 に含まれる。

最後にベゾフ空間の応用として得られる次の興味深い定理を紹介しよう。

定理 4 (ファルビック–ゾール–ファルンホルン [3]) $a \in L_\sigma^2$ とし、 $2 < s < \infty$, $3 < r < \infty$ は $2/s + 3/r = 1$ を満たす指数とする。このとき、(2.2) に属する弱解 u が (2.3) を満たすための必要十分条件は、 $a \in \dot{B}_{r,s}^{-1+3/r}$ である。

この定理は、弱解がセリンのクラスに属するためには、初期値がある程度なめらかでなければならないことを必要十分条件の形で定式化している点で優れているといえよう。すぐ後に述べるように、初期値の関数空間として、 $\dot{B}_{r,s}^{-1+3/r}$ はスケール不変性を有する。

2.2 時間局所的強解の延長可能性の追求

前節において、弱解は時間大域的な存在を示すには有利である反面、一意性や正則性を別途証明することを余儀なくされることを見た。これに対して、強解は最初から一意正則な解を求めることを目標とする。どのような初期値に対して強解を求めることが可能か？という問いに関しては、スケール不変性が重要な鍵となる。実際、

$$a_\lambda(x) = u_\lambda(x, 0) = \lambda u(\lambda x, 0) = \lambda a(\lambda x), \quad \lambda > 0$$

であるから、初期値に関するスケール変換則は、 $a_\lambda(x) = \lambda a(\lambda x)$ となる。従って、セリンのクラス (2.3) と同様に、 $\|a_\lambda\|_X = \|a\|_X$ がすべての $\lambda > 0$ で成立するような \mathbb{R}^3 上の関数空間 X で強解を求めることが目標となる。

このような X として、藤田-加藤 [8] は $X = \dot{H}_2^{\frac{1}{2}}$ ととり、 $a \in \dot{H}_2^{\frac{1}{2}}$ であれば (N-S) に時間局所的な強解が一意的に存在することを示した。第 1 節の用語を想起すれば、(N-S) は $\dot{H}_2^{\frac{1}{2}}$ において時間局所適切であることを示したのである。同時に、 $\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}a\|_{L^2}$ が十分小さければ、時間大域的強解が存在することを証明した。スケール不変性などの概念が確立していなかった 40 年以上も前にこのような結果を得ていたことは、藤田、加藤両博士のナビエ-ストークス方程式に関する造詣の深さを物語っている。実際、この論文 [8] が 20 世紀後半から今日に至るまでに非線形偏微分方程式の研究に与えた影響は計り知れない。ここではまず、その後に改良された以下の定理を紹介しておこう。

定理 5 (加藤 [13], 儀我 [10]) (1) $a \in L_\sigma^3$ とする。このとき $T > 0$ と $u \in C([0, T]; L_\sigma^3)$ なる $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 上の (N-S) の解 u が一意的に存在する。更に $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ が成り立つ。

(2) ある $\delta > 0$ が存在して、 $\|a\|_{L^3} \leq \delta$ ならば、(1) において $T = \infty$ ととれる。

証明は、非同次の発展方程式に関するデュハメル原理[†] を用いて、次の積分方程式を解くことに帰着される。

$$(2.6) \quad u(t) = e^{t\Delta}a - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}P(u \cdot \nabla u)(\tau)d\tau, \quad 0 < t < T.$$

ここで、 P は L^r から L_σ^r の上への射影作用素[‡] であり、 $P = (P_{jk})_{j,k=1,2,3}$ とするとき、 $P_{jk} = \delta_{jk} + R_j R_k$ と書ける。ただし、 $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ ($j = 1, 2, 3$) はリース作用素[‡] であり、 δ_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) はクロネッカーの表象である。定理 5 の証明については、垣田-柴田 [12, 第 5 章] に初学者向けの詳しい解説がある。

ミレニアム問題の解決には、定理 5(1) において $T = \infty$ であることを示せばよい。(2) によれば、初期値 a の L^3 -ノルムが小さければ $T = \infty$ ととれる。しかし懸賞問題は、任意の初期値に対して時間大域的な正則な解の存在を論じなければならず、残念ながらこれらは部分的な解答に過ぎない。そこで、その後の発展としては、(1) で保証された時間 $[0, T)$ 上で存在する強解 $u(t)$ が $t = T$ を超えて延長できるための十分条件や、また L^3 を拡張して、どこまで初期値の関数空間を広くとれば時間局所的な強解を構成できるか？という 2 つの方向で研究が進められた。前者の解の延長可能性の指標については、ビール-加藤-マイーダ [1] の結果が有名である。すなわち、

[†]藤田-黒田-伊藤 [7, 補題 7.11] 参照。

[‡] $Pu = u$, $P(\nabla p) = 0$ に注意すれば、(N-S) の両辺に P を作用させることから、

$$\partial_t u - \Delta u + P(u \cdot \nabla u) = 0, \quad u(0) = a$$

を得る。この発展方程式にデュハメル原理を適用して (2.6) が従う。 $e^{t\Delta}a = G_t * a$ は熱半群とよばれる。ただし、 $G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ はガウス核である。(2.6) の可解性の証明には、熱半群 e^Δ の $L^q - L^r$ -評価式

$$\|e^{t\Delta}a\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|a\|_{L^q}, \quad \|\nabla e^{t\Delta}a\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|a\|_{L^q}, \quad 1 \leq q \leq r \leq \infty, t > 0$$

が重要である。

[‡]Stein[24, I, 6.2] 参照。

$u \in C([0, T]; L_\sigma^3)$ に属する (N-S) の強解が条件

$$(2.7) \quad \int_0^T \|\operatorname{rot} u(t)\|_{L^\infty} dt < \infty$$

を満たすならば, ある $T' > T$ が存在して, u は $C([0, T']; L_\sigma^3)$ に属する (N-S) の強解となる. ここで, $\operatorname{rot} u$ は速度ベクトル u の渦度を表す. 元来彼らの結果はオイラー方程式の解に対しての局所存在時間延長可能性を論じたものではあるが, ナヴィエーストークス方程式についても成立する. 指標 (2.7) の重要性については, ミレニアム問題を解説したフェファーマン [5] に言及されている. 現時点で延長可能性についてもっとも一般的な定理を紹介しておこう.

定理 6 ([15], [17]) u を $C([0, T]; L_\sigma^3)$ に属する (N-S) の $[0, T)$ 上の強解とする. 条件 (2.5), または

$$(2.8) \quad \operatorname{rot} u \in L^1(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^0)$$

であるとき, ある $T' > T$ が存在して, u は $C([0, T']; L_\sigma^3)$ に属する (N-S) の $[0, T')$ 上の強解となる.

関数空間 (2.5), (2.7), (2.8) はすべて (N-S) に関してスケール不変である. また命題 1 により, $L^\infty \subset BMO \subset B_{\infty, \infty}^0$ に注意されたい.

強解の時間局所存在定理が得られる初期値の関数空間をどこまで広くとれるか? といった問題意識は 1990 年代から台頭した非線形シュレディンガー方程式や KdV 方程式の研究の影響によってよかる. 実際, プルガン, タオ, 高岡等はフーリエ制限法や I-method に代表される調和解析学の手法を駆使して, 非線形分散型方程式の初期値問題の局所適切性を最適な関数空間でつぎつぎと精力的に証明している. ナヴィエーストークス方程式については, 定理 5 以来も初期値の属する関数空間として, モレー空間 M_3 , ローレンツ空間 $L^{3, \infty}$ †, 斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{r, q}^{-1+3/r}$ ($3 < r \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$) などをとった場合の局所適切性が証明された. 現時点での, 局所適切性に関するもっとも一般的な結果を紹介しておこう.

定理 7 (コッホータタル [14], 三浦 [20]) (1) (局所存在) VMO^{-1} を C_0^∞ の $\dot{F}_{\infty, 2}^{-1}$ による閉包§とする. 任意の $a \in VMO^{-1}$, $\operatorname{div} a = 0$ なる初期値 a に対して, $T > 0$ と $u \in C([0, T]; VMO^{-1})$ なる (N-S) の $[0, T)$ 上の解 u が存在する.

(2) (一意性) $a \in VMO^{-1}$ とする. このとき,

$$(2.9) \quad u \in C([0, T]; \dot{F}_{\infty, 2}^{-1}) \cap L_{loc}^\infty(0, T; L^\infty)$$

なる (N-S) の $[0, T)$ 上の解 u は一意的である.

† $1 < p < \infty$ に対して, $\|f\|_{M_p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3, R > 0} R^{-3(1-\frac{1}{p})} \int_{B_R(x)} |f(y)| dy$, $\|f\|_{L^{p, \infty}} = \sup_{R > 0} R \{x \in \mathbb{R}^3; |f(x)| > R\}^{\frac{1}{p}}$ をそれぞれ, M_p , $L^{p, \infty}$ のノルムと定める. ただし, $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^3; |y - x| < R\}$. $L^p \subset L^{p, \infty} \subset M_p$ が成り立つ.

§ $a \in VMO^{-1}$ に対して, $\{a_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty$ が存在して, $\|a - a_m\|_{\dot{F}_{\infty, 2}^{-1}} \rightarrow 0$ が成り立つ.

コッホータタルは (2.9) に属する解の存在を示したが，一意性に関しては解の小ささを課していた．三浦は解の大小に関わらず，解が (2.9) に属していれば唯ひとつに限ることを証明した．通常，一意性の証明には，解の $t = 0$ の近傍での挙動を制御するための付加条件が課されるが，三浦の方法はその必要がない[¶] という点でも優れていることを強調しておこう．

さて，定理 7 の主張する，関数空間 $\dot{F}_{\infty,2}^{-1}$ における局所適切性が最適かどうか？換言すれば， $\dot{F}_{\infty,2}^{-1}$ は局所適切性が成り立つ初期値の関数空間としてもっとも広いのか？という疑問が湧く．これに対しては，次の $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ における非適切性 (ill-posedness) の結果がある．

定理 8 (ブルガン–パプロヴィツ [2]) 任意の $\delta > 0$ に対して， $a \in \mathcal{S}$ かつ $\|a\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \leq \delta$ をみたす初期値 a と $[0, \delta)$ 上の (N-S) の解 u が存在して， $\|u(t_*)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} > 1/\delta$ がある $0 < t_* < \delta$ で成り立つ．

注意 (1) X を \mathbb{R}^3 における関数空間とする．初期値 $a \in X$ に対して一意的な解 $u \in C([0, T]; X)$ が存在するとき， $S_X : a \in X \mapsto u \in C([0, T]; X)$ なる写像が定義できる．定理 5, 7 の $X = L_\sigma^3$, $X = VMO^{-1}$ においては S_X は連続写像である．実際，解の構成は積分方程式 (2.6) に付随して決定される関数空間 $C([0, T]; X)$ における逐次近似法によるものである．その副産物として，写像 S_X の連続性が得られた．ところが定理 8 は，関数空間を $X = \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ まで広くすると，もはや写像 S_X の連続性は保証されないことを主張している．すなわち，第 1 節における (iii) が破たんし， $X = \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ において (N-S) は非適切となる．包含関係

$$(2.10) \quad \dot{H}_2^{\frac{1}{2}} \subset L^3 \subset \dot{B}_{r,q}^{-1+\frac{3}{r}} (3 < r \leq \infty, 1 \leq q < \infty) \subset \dot{F}_{\infty,2}^{-1} \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$$

に注意されたい．これらは，初期値のスケール変換 $a_\lambda(x) = \lambda a(\lambda x)$ に関してすべて不変な関数空間である．左端の藤田–加藤 [8] による関数空間 $\dot{H}_2^{\frac{1}{2}}$ から右端のブルガン–パプロヴィツによる $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ に至るまで 44 年の歳月を要している．

(2) 最近では，(N-S) の非適切性に関する日本の若手数学者の活躍が目覚ましい．米田 [25] は，定理 8 を拡張し， $X = \dot{B}_{\infty,q}^{-1}$, $2 < q \leq \infty$ においても，写像 S_X は不連続であることを示した．また，岩淵 [11] はモデュレーション空間 $M_{2,q}^s$ [§]， $s < -1$, $1 \leq q < \infty$ において非適切であることを証明した．

3 おわりに

以上，ナビエーストークス方程式に関するミレニアム問題について，大急ぎでその歴史的経緯を見ながら，現在までの到達点について解説を試みた．ナビエーストークス方程式に対する本格的な数学的取扱いは，1934 年のルレイ [18] に始まりすでに 3/4 世紀が経過した．その間，日本では藤田宏先生を始祖としてこれまで世界を牽引する形で研究が進展したと評価してよいよう

[¶]この様な一意性を無条件一意性 (unconditional uniqueness) という．

[§] $\psi \in C_0^\infty$ を $\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi| \leq \sqrt{3}\}$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \psi(\xi - k) = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ なる関数とする． $\hat{\Psi}_k(\xi) = \psi(\xi - k)$, $k \in \mathbb{Z}^3$ とするとき， $\|f\|_{M_{p,q}^s} = (\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} (1 + |k|^2)^{skq/2} \|\Psi_k * f\|_{L^p}^q)^{\frac{1}{q}}$ と定義する．

に思う。21世紀になってすでに10年が過ぎようとしているが、若手数学者の台頭も著しい。しかし残念ながら、第2節で述べられていることと、ミレニアム問題には未だ隔絶の感がある。

本稿では、 \mathbb{R}^3 に限って (N-S) の適切性の問題に焦点を当てた。確かに、偏微分方程式の見地からは、まずはフーリエ変換などが自由に使える \mathbb{R}^3 において適切性を研究することが常道であろう。一方、流体力学の最大の目的は「揚力最大・抵抗最少」である。従って、工学などの現場の要求に応えるためには、境界のある領域の内部または外部でナビエーストークス方程式を考察することを余儀なくされる。たとえば、多重連結領域における非斉次境界値条件下の定常ナビエーストークス方程式の可解性は未解決問題である。領域の位相幾何的な条件と方程式の可解性の問題は、非線形偏微分方程式の主要な研究テーマであるが、この方面においても課題が山積していると思われる。このことについては、次回に述べることができれば幸いである。

参考文献

- [1] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*. Commu. Math. Phys. **94**, 61–66 (1984).
- [2] Bourgain, J., Pavlović, N., *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D*. J. Func. Anal. **255**, 2233–2247 (2008).
- [3] Farwig, R., Sohr, H., Varnhorn, W., *Optimal initial value conditions for local strong solutions of the Navier-Stokes equations*. Ann. Univ. Ferrara **55**, 89–110 (2009).
- [4] Escauriaza, L., Seregin, G., Šverák, V., *$L_{3,\infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness*. Russian Math. Surveys **52:2**, 211–250 (2003).
- [5] Fefferman, C., *Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equations*. Millennium Prize Problems, Clay Mathematical Institute, 2000, <http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm>
- [6] Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G., *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*. CMBS **79** Amer. Math. Sci. Providence Rhode Island, 1991.
- [7] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三, 関数解析岩波基礎数選書 1991
- [8] Fujita, H., Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem I*. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269–315 (1964).
- [9] 藤田 宏, 岡 本久, Navier-Stokes 方程式の解の存在問題, 「数学七つの未解決問題」森北出版, 2002.
- [10] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*. J. Differential Eq. **62**, 182–212 (1986).
- [11] Iwabuchi, T., *Navier-Stokes equations and nonlinear heat equations in modulation spaces with negative derivative indices*. to appear in J. Differential Equations.
- [12] 垣田高夫, 柴田良弘, ベクトル解析から流体へ日本評論社 2007
- [13] Kato, T., *Strong L^p -solution of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions*. Math. Z. **187**, 471–480 (1984).
- [14] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*. Adv. Math. **157**, 22–35 (2001).
- [15] Kozono, H., Ogawa, T., Taniuchi, Y., *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*. Math. Z. **242**, 251–278 (2002).

- [16] Kozono, H., Sohr, H., *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Analysis **16**, 255–271 (1996).
- [17] Kozono, H., Shimada, Y., *Bilinear estimates in homogeneous Triebel-Lizorkin spaces and the Navier-Stokes equations.* Math. Nach. **276**, 63–74 (2004).
- [18] Leray, J., *Sur le mouvement d'un liquids visqueux emplissant l'espace.* Acta. Math. **63**, 193–248 (1934).
- [19] Masuda, K., *Weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Tohoku Math. J. (2) **36**, 623–646 (1984).
- [20] Miura, H., *Remark on uniqueness of mild solutions to the Navier-Stokes equations.* J. Func. Anal. **218**, 110–129 (2005).
- [21] 岡本 久, Navier-Stokes 方程式の未解決問題. 数理科学 No. 455, May 数学の未解決問題 21 世紀に向けて 19, 67–74(2001).
- [22] Serrin, J., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations.* Nonlinear Problems, R. E. Langer ed., Madison: University of Wisconsin Press, 69-98 (1963).
- [23] Sohr, H., von Wahl, W., *On the singular set and the uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Manuscripta Math. **49**, 27–59(1984).
- [24] Stein, E. M., *Harmonic Analysis.* Princeton University Press 1993.
- [25] Yoneda, T., *Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in Besov spaces near BMO^{-1} .* preprint