＊＊＊　補足：積分の漸近展開　＊＊＊

2010/05　鈴木幸人

①Laplace's method

$$I(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-k\phi(t)}dt,\ k\to\infty,$$

$$f,\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f,\phi\in C(\mathbb{R})$$

②Stationary phase method

$$I(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ik\phi(t)}dt,\ k\to\infty,$$

$$f,\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f,\phi\in C(\mathbb{R})$$

③Method of steepest descent

$$I(k)=\int_{C}f(z)e^{k\phi(z)}dz,\ \ k\to\infty,$$

$$f,\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\text{analytic}$$

○漸近展開の定義

Banach 空間 X 上に定義された複素数値関数 $\phi,\psi:X\to\mathbb{C}$ に対して

$$\phi(k)=O(\psi(k)),\ k\to k_0$$
$$\Leftrightarrow \exists\delta,A>0,\|k-k_0\|<\delta\Rightarrow|\phi(k)|\le A|\psi(k)|,$$
$$\phi(k)=o(\psi(k)),\ k\to k_0$$
$$\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\|k-k_0\|<\delta\Rightarrow|\phi(k)|\le \epsilon|\psi(k)|$$

と定義する。

また関数列 $\{\delta_1,\delta_2,\ldots\},\delta_j:X\to\mathbb{C}\ (j\in\mathbb{N})$ において

$$\delta_{j+1}(k)=o\left(\delta_j(k)\right),\ k\to k_0\ \ (\forall j\in\mathbb{N})$$

が成り立つとき $\{\delta_1,\delta_2,\ldots\}$ は $k\to k_0$ における漸近列であるという。さらに関数 $I:X\to\mathbb{C}$ に対し、$k\to k_0$ における漸近列 $\{\delta_1,\ldots,\delta_{N+1}\},\delta_j:X\to\mathbb{C}\ (j=1,\ldots,N+1)$（と $a_1,\ldots,a_N\in\mathbb{C}$）が存在して

$$I(k)-\sum_{j=1}^{m}a_j\delta_j(k)=O\big(\delta_{m+1}(k)\big),\ \ k\to k_0\quad (m=1,\ldots,N)$$

（$N\in\mathbb{N}$）が成り立つとき $\sum_{j=1}^{N}a_j\delta_j(k)$ は関数 $I(k)$ の $k\to k_0$ におけるオーダー δ_N の漸近展開であるという。

(1) Laplace's method

Proposition 1.（Laplace 積分の主要部） Laplace 積分 $I(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-k\phi(t)}dt$ を定義する連続関数 $\phi,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ において

$$\exists c\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{c\}\Rightarrow\phi(t)>\phi(c)\ \text{and}\ f(c)\neq 0, \tag{1}$$

および

$$f\in L_1(\mathbb{R}) \tag{2}$$

が成り立つものとする [1]。そのとき、Laplace積分 $I(x)$ の積分範囲を点 c の近傍 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ に制限したもの：

$$I(k;\varepsilon)=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(t)e^{-k\phi(t)}dt$$

と元の Laplace 積分との差は $k\to\infty$ において指数関数的に減少する。すなわち

$$\exists C,\gamma>0,|I(k)-I(k;\varepsilon)|/|I(k;\varepsilon)|<Ce^{-\gamma k}$$

が成り立つ。したがって、$I(k)$ と $I(k;\varepsilon)$ の k の（負の）べき乗による漸近展開は完全に一致する [2]。

Proof

$f\in C(\mathbb{R})$ で $f(c)\neq 0$ であるから

$$\exists\varepsilon>0,\ t\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\Rightarrow\operatorname{sgn}f(t)=\operatorname{sgn}f(c) \tag{3}$$

が成り立ち、$\phi\in C(\mathbb{R})$ で $t\in\mathbb{R}\setminus\{c\}\Rightarrow\phi(t)>\phi(c)$ であるから

$$\exists\tilde{\varepsilon}>0,\ \tilde{t}\in[c-\tilde{\varepsilon},c+\tilde{\varepsilon}]\Rightarrow\inf_{t\in\mathbb{R}\setminus(c-\varepsilon,c+\varepsilon)}\phi(t)>\phi(\tilde{t}) \tag{4}$$

が成り立つ [3]。さらに $|f(t)|e^{-k\phi(t)}\in C(\mathbb{R})$ より

$$\exists\tilde{c}\in[c-\tilde{\varepsilon},c+\tilde{\varepsilon}],\ |f(\tilde{c})|e^{-k\phi(\tilde{c})}=\min_{t\in[c-\tilde{\varepsilon},c+\tilde{\varepsilon}]}\left\{|f(t)|e^{-k\phi(t)}\right\} \tag{5}$$

であり、また

$$M=\inf_{t\in\mathbb{R}\setminus(c-\varepsilon,c+\varepsilon)}\phi(t) \tag{6}$$

---

[1] さらに $\lim_{t\to\pm\infty}\phi(t)>\phi(c)$ を仮定する。

[2] $I(k)$ と $I(k;\varepsilon)$ の漸近展開

$I(k)=a_0+a_1k^{-1}+a_2k^{-2}+\cdots+a_mk^{-m}+R_a(k),\ \ R_a(k)=O\left(k^{-(m+1)}\right)\ (k\to\infty)$

$I(k;\varepsilon)=b_0+b_1k^{-1}+b_2k^{-2}+\cdots+b_mk^{-m}+R_b(k),\ \ R_b(k)\sim O\left(k^{-(m+1)}\right)\ (k\to\infty)$

が可能であり、ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して $a_0=b_0,\cdots,a_{m-1}=b_{m-1},a_m\neq b_m$ であるとすると

$|I(k)-I(k;\varepsilon)|=|(a_m-b_m)k^{-m}+R(k)|,$

$R(k)=R_a(k)-R_b(k)=O\left(k^{-(m+1)}\right)\ (k\to\infty)$

である $\left(\because|R_a-R_b|\le|R_a|+|R_b|\le A_a\left|k^{-(m+1)}\right|+A_b\left|k^{-(m+1)}\right|=(A_a+A_b)\left|k^{-(m+1)}\right|\right)$ が、これは $|I(k)-I(k;\varepsilon)|$ が指数関数的に 0 に近づくこと、すなわち

$\exists C,\gamma>0,|I(k)-I(k;\varepsilon)|<Ce^{-\gamma k}$

であることに反する。実際

$$1=\frac{|I(k)-I(k;\varepsilon)|}{|I(k)-I(k;\varepsilon)|}>\frac{|(a_m-b_m)k^{-m}+R(k)|}{Ce^{-\gamma k}}$$
$$=C^{-1}\left|(a_m-b_m)k^{-m}e^{\gamma k}+\left[R(k)/k^{-(m+1)}\right]k^{-(m+1)}e^{\gamma k}\right|\to\infty\ \ (k\to\infty)$$

となる。

[3] ここで $\lim_{t\to\pm\infty}\phi(t)>\phi(c)$ であることを仮定している（脚注１）。

とおくと(4)式より

$$\phi(\tilde{c}) < M \tag{7}$$

である。

以上のことから

$$\begin{aligned}
\frac{|I(k) - I(k;\varepsilon)|}{|I(k;\varepsilon)|} &= \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-k\phi(t)}dt - \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)e^{-k\phi(t)}dt\right|}{\left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)e^{-k\phi(t)}dt\right|} \\
&\leq \frac{\int_{-\infty}^{c-\varepsilon}|f(t)|e^{-k\phi(t)}dt + \int_{c+\varepsilon}^{\infty}|f(t)|e^{-k\phi(t)}dt}{\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}|f(t)|e^{-k\phi(t)}dt} \quad (\because(3)) \\
&\leq \frac{e^{-kM}\int_{-\infty}^{c-\varepsilon}|f(t)|dt + e^{-kM}\int_{c+\varepsilon}^{\infty}|f(t)|dt}{\int_{c-\tilde{\varepsilon}}^{c+\tilde{\varepsilon}}|f(t)|e^{-k\phi(t)}dt} \quad (\because (6), \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon) \\
&\leq \frac{2\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}e^{-kM}}{2\tilde{\varepsilon}|f(\tilde{c})|e^{-k\phi(\tilde{c})}} \quad (\because(5)) \\
&= \frac{\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\tilde{\varepsilon}|f(\tilde{c})|}e^{-k(M-\phi(\tilde{c}))}
\end{aligned}$$

が成り立つ。(7)式より、これは $k \to \infty$ のとき指数関数的に 0 に近づく [4]。

■

Proposition 2.（Watson's Lemma） 次の形の積分を考える：

$$I(k) = \int_0^b f(t)e^{-kt}dt \quad (b > 0 \text{ or } b = \infty) \tag{8}$$

ただし $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は

$$f(t) \sim t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}, \ t \to 0 \tag{9}$$

と漸近展開できるものとする。ここで α と β は

$$\alpha > -1, \quad \beta > 0 \tag{10}$$

なる実数である。さらに

$$\exists M, c > 0, \forall t \in (0,\infty) \ |f(t)| \leq Me^{ct} \tag{11}$$

が成り立つものとする。このとき $I(k)$ は

$$I(k) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{k^{\alpha+\beta n+1}}, \ k \to \infty \tag{12}$$

と漸近展開することができる [5]。

---

[4] (5)式より $\tilde{c} \in [c-\tilde{\varepsilon}, c+\tilde{\varepsilon}]$ は k に依存するが、$\tilde{\varepsilon} > 0$ は k に依存しないので、$|f(\tilde{c})|$は $k \to \infty$ のときある有限の範囲の値をとる。より正確には $\alpha = \inf_{\tilde{c}\in[c-\tilde{\varepsilon},c+\tilde{\varepsilon}]}|f(\tilde{c})|$ および $\beta = \sup_{\tilde{c}\in[c-\tilde{\varepsilon},c+\tilde{\varepsilon}]}\phi(\tilde{c})$ と定義し $|I(k) - I(k;\varepsilon)|/|I(k;\varepsilon)| \leq \left(\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}/\tilde{\varepsilon}\alpha\right)e^{-k(M-\beta)}$ と評価すればよい（(4)式より $\beta < M$ である）。

[5] ただし $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ $(\Re z > 0)$ である。

Proof

任意の $R \in (0,\infty)$ に対して、積分 $I(k)$ を二つの和

$$I(k) = I_1(k) + I_2(k),$$

$$I_1(k) = \int_0^R f(t) e^{-kt} dt, \quad I_2(k) = \int_R^b f(t) e^{-kt} dt$$

に分割することができる。このとき、(11)式より

$$\exists M, c > 0, |I_2(k)| \le \int_R^b |f(t)| e^{-kt} dt \le M \int_R^b e^{-(k-c)t} dt$$

であるから

$$k > c \Rightarrow |I_2(k)| \le M \int_R^b e^{-(k-c)t} dt = M \frac{e^{-(k-c)R} - e^{-(k-c)b}}{k-c}$$

したがって

$$\sup_{k>2c} \frac{|I_2(k)|}{e^{-kR}/k} \le \sup_{k>2c} M \frac{e^{cR} + e^{cb} e^{-k(b-R)}}{1 - c/k} \le 2M\left(e^{cR} + e^{cb} e^{-2c(b-R)}\right)$$

より $I_2(k) = O(e^{-kR}/k), k \to \infty$ である。

一方、(9)式より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_1(k) = \int_0^R \left[\sum_{n=0}^N a_n t^{\alpha+\beta n} + O\left(t^{\alpha+\beta(N+1)}\right)\right] e^{-kt} dt$$

であるが

$$\int_0^R a_n t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = a_n \int_0^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt - a_n \int_R^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt,$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\alpha+\beta n} e^{-\tau} \frac{d\tau}{k} = \frac{\int_0^\infty \tau^{(\alpha+\beta n+1)-1} e^{-\tau} d\tau}{k^{\alpha+\beta n+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{k^{\alpha+\beta n+1}}$$

$$\int_R^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = \left[t^{\alpha+\beta n} \frac{e^{-kt}}{-k}\right]_R^\infty - (\alpha+\beta n) \int_R^\infty t^{\alpha+\beta n-1} \frac{e^{-kt}}{-k} dt$$

$$= R^{\alpha+\beta n} \frac{e^{-kR}}{k} + \frac{\alpha+\beta n}{k} \left\{\left[t^{\alpha+\beta n-1} \frac{e^{-kt}}{-k}\right]_R^\infty - (\alpha+\beta n-1) \int_R^\infty t^{\alpha+\beta n-2} \frac{e^{-kt}}{-k} dt\right\}$$

$$= \cdots = O\left(\frac{e^{-kR}}{k}\right), \ k \to \infty$$

である[6]から

---

[6] $\lim_{M\to\infty} \int_0^M t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = \int_0^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt < \infty$

$\lim_{M\to\infty} \int_R^M t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = \int_R^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt < \infty$

であるから

$$\int_0^R t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = \lim_{M\to\infty} \left[\int_0^M t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt - \int_R^M t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt\right]$$

$$= \int_0^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt - \int_R^\infty t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt$$

である。

$$\int_0^R a_n t^{\alpha+\beta n} e^{-kt} dt = a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{k^{\alpha+\beta n+1}} + O\left(\frac{e^{-kR}}{k}\right),\ k \to \infty$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned}\exists A, \delta > 0, R < \delta \Rightarrow \int_0^R O\left(t^{\alpha+\beta(N+1)}\right) e^{-kt} dt &\le A \int_0^R t^{\alpha+\beta(N+1)} e^{-kt} dt \\ &= A \int_0^R \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\alpha+\beta(N+1)} e^{-\tau} \frac{d\tau}{k} \\ &= A \frac{\Gamma(\alpha+\beta(N+1)+1)}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^R O\left(t^{\alpha+\beta(N+1)}\right) e^{-kt} dt = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right),\ k \to \infty$$

が成り立つ [7]。したがって

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \int_0^R \left[\sum_{n=0}^N a_n t^{\alpha+\beta n} + O\left(t^{\alpha+\beta(N+1)}\right)\right] e^{-kt} dt \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{k^{\alpha+\beta n+1}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right),\ k \to \infty \end{aligned}$$

である [8]。

以上より、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$I(k) = I_1(k) + I_2(k) = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{k^{\alpha+\beta n+1}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right),\ k \to \infty$$

が得られる。

■

Proposition 3.（Laplace's Method） 次の形の積分を考える：

$$I(k) = \int_a^b f(t) e^{-k\phi(t)} dt \tag{13}$$

ただし $\phi \in C^5[a,b], f \in C^3[a,b]$ で

$$\exists c \in [a,b],\ \phi'(c) = 0, \phi''(c) > 0, f(c) \neq 0 \text{ and } t \in [a,b] \setminus \{c\} \Rightarrow \phi'(t) \neq 0 \tag{14}$$

が成り立つものとする。そのとき $I(k)$ は

---

[7] 積分の分割点 $R \in (0,b)$ のとり方は任意であったから、$O\left(t^{\alpha+\beta(N+1)}\right)$ の評価における δ に対して $R < \delta$ が成り立つものとして良い。

[8] 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\exists A, M > 0, k > M \Rightarrow O\left(\frac{e^{-kR}}{k}\right)/k^n \le Ak^{-1-n} e^{-kR} \le AM^{-1-n} e^{-MR}$ が成り立つから $O\left(\frac{e^{-kR}}{k}\right) + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right)$ である。

$c \in (a,b)$

$$\Rightarrow I(k) \sim e^{-k\phi(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(c)k}} \left[f(c) + \frac{1}{2k} \left\{ \frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3} \right\} + O(k^{-2}) \right],\ k \to \infty, \tag{15}$$

$c \in \{a,b\}$

$$\Rightarrow I(k) \sim e^{-k\phi(c)} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)k}} f(c) \mp \frac{1}{k} \left\{ \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2} \right\} + O\left(k^{-\frac{3}{2}}\right) \right],$$

$$k \to \infty$$

と漸近展開することができる。

Proof

積分 $I(k)$ を二つの和

$$I(k) = I_a(k) + I_b(k),\quad I_a(k) = \int_a^c f(t)e^{-k\phi(t)}dt,\ I_b(k) = \int_c^b f(t)e^{-k\phi(t)}dt$$

に分割すると、(14)式の条件よりそれぞれの積分区間 $[a,c]$ および $[c,b]$ において $\phi(t)$ はそれぞれ単調減少および単調増加である。

まず積分 I_b を考える。その積分区間 $[c,b]$ において関数 $\phi: [c,b] \to \mathbb{R}$ は単調増加であるから、逆関数 $\phi^{-1}: [\phi(c), \phi(b)] \to [c,b]$ が存在し、したがって変数変換

$$\tau = \phi(t) - \phi(c),\quad t = \phi^{-1}\big(\tau + \phi(c)\big)$$

を施すことができる：

$$\begin{aligned} I_b(k) &= \int_c^b f(t)e^{-k\phi(t)}dt \\ &= \int_0^{\phi(b)-\phi(c)} f\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right) e^{-k(\tau+\phi(c))} \frac{d\tau}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)} \\ &= e^{-k\phi(c)} \int_0^{\phi(b)-\phi(c)} \frac{f\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)} e^{-k\tau} d\tau \end{aligned}$$

変数変換 $\tau(t) = \phi(t) - \phi(c)$ を $t = c$ のまわりで Taylor 級数展開すると

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(c) + \tau'(c)(t-c) + \frac{1}{2}\tau''(c)(t-c)^2 + \frac{1}{6}\tau'''(c)(t-c)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}\tau^{(4)}(c)(t-c)^4 + O((t-c)^5) \\ &= \frac{1}{2}\phi''(c)(t-c)^2 + \frac{1}{6}\phi'''(c)(t-c)^3 + \frac{1}{24}\phi^{(4)}(c)(t-c)^4 + O((t-c)^5),\ t \to c \end{aligned}$$

であるが、これに $t-c$ の τ に関する漸近展開[9]

$$t-c=A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta}),\ \tau\to 0\quad(\alpha<\beta<\gamma<\eta)$$

を代入すると

$$\tau=\frac{1}{2}\phi''(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^2+\frac{1}{6}\phi'''(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^3$$

$$+\frac{1}{24}\phi^{(4)}(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^4$$

$$+O\left(\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^5\right),\ \tau\to 0$$

であるから

$$1=2\alpha,\ \ 1=\frac{1}{2}\phi''(c)A^2,$$

$$\alpha+\beta=3\alpha,\ \ 0=\phi''(c)AB+\frac{1}{6}\phi'''(c)A^3,$$

$$\alpha+\gamma=2\beta=2\alpha+\beta=4\alpha,\ 0=\phi''(c)AC+\frac{\phi''(c)B^2}{2}+\frac{\phi'''(c)A^2B}{2}+\frac{\phi^{(4)}(c)A^4}{24},$$

$$\cdots$$

すなわち

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \gamma=\frac{3}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$B=-\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)}\cdot\frac{2}{\phi''(c)}=-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

$$C=-\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{[\phi'''(c)]^2}{3[\phi''(c)]^3}+\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}$$

でなければならない[10]。したがって、$t-c$ の τ に関する漸近展開は

---

[9] $t=c\Leftrightarrow\tau=0$ であるから漸近展開の定数項は０、したがって $\alpha,\beta,\gamma,\eta\neq 0$ である。また $t\in(c,b)\Leftrightarrow\tau\in\big(0,\phi(b)-\phi(c)\big)$ であるから $A\geq 0$ である。

[10] 漸近展開の指数の条件より $2\alpha<\alpha+\beta<2\beta,\alpha+\gamma$ および $3\alpha<2\alpha+\beta<\alpha+2\beta,2\alpha+\gamma<\cdots$ である。したがって、少なくとも二つ以上の項が釣り合うためには $2\alpha=1,\alpha+\beta=3\alpha$ すなわち $\alpha=1/2,\beta=1$ でなければならず、その場合 $2\beta=2\alpha+\beta=4\alpha=2$ である。

$$t-c=\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2}-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\tau$$
$$+\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}\tau^{3/2}+O(\tau^4),\ \tau\to 0 \tag{16}$$

と表される。また $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開を

$$\frac{1}{t-c}=A\tau^\alpha+B\tau^\beta+C\tau^\gamma+O(\tau^\eta),\ \tau\to 0\quad(\alpha<\beta<\gamma<\eta)$$

とすると

$$1=\left[A\tau^\alpha+B\tau^\beta+C\tau^\gamma+O(\tau^\eta)\right]$$
$$\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2}-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\tau+\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}\tau^{3/2}\right.$$
$$\left.+O(\tau^4)\right],\ \tau\to 0$$

より

$$0=\alpha+\frac{1}{2},\ 1=A\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$\alpha+1=\beta+\frac{1}{2},\ 0=-A\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}+B\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$\alpha+\frac{3}{2}=\beta+1=\gamma+\frac{1}{2},$$

$$0=A\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}-B\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}+C\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}$$

したがって

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=0,\ \gamma=\frac{1}{2},\ \eta\geq 1$$

γ に関しては、$\alpha+\gamma=2\beta=2\alpha+\beta=4\alpha$ と $\alpha+\gamma=\alpha+2\beta=3\alpha+\beta$ の二つの可能性があり、それぞれ $\gamma=3/2$ および $\gamma=2$ であるが、後者の場合には 2 次の項は 2β 次と $2\alpha+\beta$ 次の項のみとなるから $(1/2)\phi''(c)B^2+(1/6)\phi'''(c)\cdot 3A^2B$ が成り立たなければならない。

$$A=\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}},$$

$$B=\frac{\phi''(c)}{2}\cdot\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}=\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)},$$

$$C=-\frac{\phi''(c)}{2}\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}+\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}$$

$$=-\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}+\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{\phi^{(4)}(c)}{12[\phi''(c)]^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-c}&=\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\tau^{-1/2}+\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)}\\&\quad+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2}-\frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}\tau^{1/2}+O(\tau^1),\ \tau\to 0\end{aligned}\tag{17}$$

となる。

一方、関数 $f(t)$ と $\phi'(t)$ を $t=c$ のまわりで Taylor 展開すると

$$f(t)=f(c)+(t-c)f'(c)+\frac{1}{2}(t-c)^2f''(c)+O((t-c)^3),$$

$$\phi'(t)=(t-c)\phi''(c)+\frac{1}{2}(t-c)^2\phi'''(c)+\frac{1}{6}(t-c)^3\phi^{(4)}(c)+O((t-c)^4),\ t\to c$$

であるから、$f(t)/\phi'(t)$ の $t=c$ のまわりの漸近展開

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)}=A(t-c)^\alpha+B(t-c)^\beta+C(t-c)^\gamma+O((t-c)^\eta),$$

$$\tau\to 0\quad(\alpha<\beta<\gamma<\eta)$$

において

$$\begin{aligned}&f(c)+(t-c)f'(c)+\frac{1}{2}(t-c)^2f''(c)+O((t-c)^3)\\&\quad=\left[A(t-c)^\alpha+B(t-c)^\beta+C(t-c)^\gamma+O((t-c)^\eta)\right]\\&\qquad\cdot\left[(t-c)\phi''(c)+\frac{1}{2}(t-c)^2\phi'''(c)+\frac{1}{6}(t-c)^3\phi^{(4)}(c)+O((t-c)^4)\right]\end{aligned}$$

したがって

$$0=\alpha+1,\ f(c)=A\phi''(c),$$

$$1 = \alpha + 2 = \beta + 1,\ f^{'}(c) = \frac{A}{2}\phi^{'''}(c) + B\phi^{''}(c),$$

$$2 = \alpha + 3 = \beta + 2 = \gamma + 1,\ \frac{1}{2}f^{''}(c) = \frac{A}{6}\phi^{(4)}(c) + \frac{B}{2}\phi^{'''}(c) + C\phi^{''}(c),$$

$$3 = \alpha + 4 = \beta + 3 = \gamma + 2 = \eta + 1,\ \cdots$$

すなわち

$$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \eta = 2,$$

$$A = \frac{f(c)}{\phi^{''}(c)},$$

$$B = \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left[f^{'}(c) - \frac{A}{2}\phi^{'''}(c)\right] = \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left[f^{'}(c) - \frac{f(c)\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\right],$$

$$C = \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left[\frac{1}{2}f^{''(c)} - \frac{A}{6}\phi^{(4)}(c) - \frac{B}{2}\phi^{'''}(c)\right]$$

$$= \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left\{\frac{1}{2}f^{''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi^{''}(c)} - \frac{\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\left[f^{'}(c) - \frac{f(c)\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\right]\right\}$$

が成り立たなければならない[11]。故に $f(t)/\phi^{'}(t)$ の $t = c$ のまわりの漸近展開は

$$\frac{f(t)}{\phi^{'}(t)} = \frac{f(c)}{\phi^{''}(c)}(t-c)^{-1} + \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left[f^{'}(c) - \frac{f(c)\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\right]$$
$$+ \frac{1}{\phi^{''}(c)}\left\{\frac{1}{2}f^{''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi^{''}(c)} - \frac{\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\left[f^{'}(c) - \frac{f(c)\phi^{'''}(c)}{2\phi^{''}(c)}\right]\right\}(t-c)$$
$$+ O((t-c)^2),\ t \to c$$

と表されるが、$t - c$ と $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開（(16)式と(17)式）より

[11] 例えば $0 = \alpha + 1,\ f(c) = A\phi^{''}(c),\ 1 = \alpha + 2,\ f^{'}(c) = \frac{A}{2}\phi^{'''}(c)$ となって $\beta + 1 \geq 2$ となる可能性等が考えられるが、そのときには関数 $f(t)$ と $\phi'(t)$ の間に $f(c)/\phi^{''}(c) = 2f^{'}(c)/\phi^{'''}(c)$ なる関係が成り立たなければならない。その場合０次の項は０になる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{f\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)} \\
&\quad = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\left[\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} + \frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}\tau^{\frac{1}{2}} + O(\tau)\right] \\
&\qquad + \frac{1}{\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right] \\
&\qquad + \frac{1}{\phi''(c)}\left\{\frac{1}{2}f''(c) - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot\left\{\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2} + O(\tau)\right\} \\
&\qquad + O(\tau) \\
&\quad = a_0\tau^{-1/2} + a_1 + a_2\tau^{1/2} + O(\tau) \\
&\quad = \tau^{-1/2}\left[a_0 + a_1\tau^{1/2} + a_2\tau + O(\tau^{3/2})\right],\ \tau \to 0
\end{aligned}
$$

ただし

$$a_0 = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}} = \frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}},$$

$$a_1 = \frac{f(c)}{\phi''(c)} \cdot \frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)} + \frac{1}{\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right] = \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

$$a_2 = \frac{f(c)}{\phi''(c)} \cdot \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}} \cdot \frac{1}{\phi''(c)}\left\{\frac{1}{2}f''(c) - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{f(c)[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$+ 2\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{2\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{2[\phi''(c)]^2} + \frac{f(c)[\phi'''(c)]^2}{4[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\}$$

が得られる。

以上をまとめると、積分 I_b は

$$I_b(k) = e^{-k\phi(c)}\int_0^{\phi(b)-\phi(c)} F(\tau)e^{-k\tau}\,d\tau$$

と表され、関数 $F: [0, \phi(b) - \phi(c)] \to \mathbb{R}$ は

$$F(\tau) = \frac{f\left(\phi^{-1}\left(\tau + \phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau + \phi(c)\right)\right)} = \tau^\alpha\left[a_0 + a_1\tau^\beta + a_2\tau^{2\beta} + O\left(\tau^{3\beta}\right)\right],\ \tau \to 0$$

ただし

$$\alpha = -\frac{1}{2},\ \ \beta = \frac{1}{2},$$

$$a_0 = \frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}},\ \ a_1 = \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\}$$

と漸近展開される。したがって Watson's Lemma より

$$I_b(k) = e^{-k\phi(c)}\left[\frac{a_0\Gamma(\alpha+\beta\cdot 0+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 0+1)}} + \frac{a_1\Gamma(\alpha+\beta\cdot 1+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 1+1)}} + \frac{a_2\Gamma(\alpha+\beta\cdot 2+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 2+1)}} + O\left(\frac{1}{k^{(\alpha+\beta\cdot 3+1)}}\right)\right]$$

$$= e^{-k\phi(c)}\left[\frac{a_0\Gamma(1/2)}{k^{1/2}} + \frac{a_1\Gamma(1)}{k} + \frac{a_2\Gamma(3/2)}{k^{3/2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= e^{-k\phi(c)}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)k}}f(c) + \frac{1}{k}\left\{\frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\right\} + \sqrt{\frac{\pi}{8\phi''(c)k^3}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\} + O(k^{-2})\right],\ k\to\infty$$

が得られる[12]。

一方 I_a の場合には、その積分区間 $[a,c]$ において関数 $\phi:[a,c]\to\mathbb{R}$ は単調減少であるから、同様に逆関数 $\phi^{-1}:[\phi(c),\phi(a)]\to[a,c]$ が存在し、したがって変数変換

$$\tau = \phi(t)-\phi(c),\quad t=\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)$$

を施すことができる：

$$I_a(k) = \int_a^c f(t)e^{-k\phi(t)}dt$$

$$= \int_{\phi(a)-\phi(c)}^{0} f\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)e^{-k(\tau+\phi(c))}\frac{d\tau}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)}$$

$$= -e^{-k\phi(c)}\int_0^{\phi(a)-\phi(c)} \frac{f\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\tau+\phi(c)\big)\right)}e^{-k\tau}d\tau$$

変数変換 $\tau(t)=\phi(t)-\phi(c)$ の $t=c$ のまわりの Taylor 展開

$$\tau(t) = \frac{1}{2}\phi''(c)(t-c)^2 + \frac{1}{6}\phi'''(c)(t-c)^3 + \frac{1}{24}\phi^{(4)}(c)(t-c)^4 + O((t-c)^5)$$

---

[12] ただし

$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \tau^{-1}e^{-\tau^2}\cdot 2\tau d\tau = \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

$\Gamma(3/2) = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \left[t^{\frac{1}{2}}(-e^{-t})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(-e^{-t})dt$

$\quad = (1/2)\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma(1/2)/2 = \sqrt{\pi}/2$

である。

に $t-c$ の τ に関する漸近展開[13]

$$t-c=A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta}),\ \tau\to 0\quad(\alpha<\beta<\gamma<\eta)$$

を代入すると

$$\tau=\frac{1}{2}\phi''(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^2+\frac{1}{6}\phi'''(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^3$$

$$+\frac{1}{24}\phi^{(4)}(c)\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^4$$

$$+O\left(\left[A\tau^{\alpha}+B\tau^{\beta}+C\tau^{\gamma}+O(\tau^{\eta})\right]^5\right),\ \tau\to 0$$

であるから

$$1=2\alpha,\ \ 1=\frac{1}{2}\phi''(c)A^2,$$

$$\alpha+\beta=3\alpha,\ \ 0=\phi''(c)AB+\frac{1}{6}\phi'''(c)A^3,$$

$$\alpha+\gamma=2\beta=2\alpha+\beta=4\alpha,\ 0=\phi''(c)AC+\frac{\phi''(c)B^2}{2}+\frac{\phi'''(c)A^2B}{2}+\frac{\phi^{(4)}(c)A^4}{24},$$

$$\cdots$$

すなわち

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \gamma=\frac{3}{2}$$

$$A=-\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$B=-\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)}\cdot\frac{2}{\phi''(c)}=-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

$$C=\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{[\phi'''(c)]^2}{3[\phi''(c)]^3}+\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}$$

でなければならない[14]。したがって、$t-c$ の τ に関する漸近展開は

---

[13] $t=c\Leftrightarrow\tau=0$ であるから漸近展開の定数項は０、したがって $\alpha,\beta,\gamma,\eta\neq 0$ である。また $t\in(a,c)\Leftrightarrow\tau\in\big(0,\phi(a)-\phi(c)\big)$ であるから $A\leq 0$ である。

[14] I_b のときの係数を A_b,B_b,C_b、I_a のときの係数を A_a,B_a,C_a とすると

$$A_a=-A_b,B_a=B_b,C_a=-C_b$$

である。

$$t-c=-\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2}-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\tau$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}\tau^{3/2}+O(\tau^4),\ \tau\to 0 \tag{18}$$

と表される。また $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開を

$$\frac{1}{t-c}=A\tau^\alpha+B\tau^\beta+C\tau^\gamma+O(\tau^\eta),\ \tau\to 0\quad (\alpha<\beta<\gamma<\eta)$$

とすると

$$1=\left[A\tau^\alpha+B\tau^\beta+C\tau^\gamma+O(\tau^\eta)\right]$$
$$\cdot\left[-\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2}-\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\tau-\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}\tau^{3/2}\right.$$
$$\left.+O(\tau^4)\right],\ \tau\to 0$$

より

$$0=\alpha+\frac{1}{2},\ 1=-A\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$\alpha+1=\beta+\frac{1}{2},\ 0=-A\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}-B\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}},$$

$$\alpha+\frac{3}{2}=\beta+1=\gamma+\frac{1}{2},$$

$$0=-A\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}-\frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\}-B\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}-C\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}$$

したがって

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=0,\ \gamma=\frac{1}{2},\ \eta\geq 1$$

$$A=-\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}},$$

$$B=\frac{\phi''(c)}{2}\cdot\frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}=\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)},$$

$$C = \frac{\phi''(c)}{2}\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{5[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3} - \frac{\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2}\right\} - \sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{[\phi'''(c)]^2}{18[\phi''(c)]^3}$$

$$= \sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3} - \sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\frac{\phi^{(4)}(c)}{12[\phi''(c)]^2}$$

である[15]から

$$\frac{1}{t-c} = -\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\tau^{-1/2} + \frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)}$$
$$- \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}\tau^{1/2} + O(\tau^1),\ \tau \to 0 \tag{19}$$

となる。

一方、I_b のときと全く同様に $f(t)/\phi'(t)$ の $t = c$ のまわりの漸近展開は

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}(t-c)^{-1} + \frac{1}{\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]$$
$$+ \frac{1}{\phi''(c)}\left\{\frac{1}{2}f''(c) - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]\right\}(t-c)$$
$$+ O((t-c)^2),\ t \to c$$

と表されるから、$t - c$ と $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開（(18)式と(19)式）より

[15] $t - c$ の場合と同様に、I_b のときの係数を A_b, B_b, C_b、I_a のときの係数を A_a, B_a, C_a とすると

$$A_a = -A_b, B_a = B_b, C_a = -C_b$$

が成り立つ。

$$
\frac{f\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(c)}{\phi''(c)}\left[-\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} + \frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)} - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}\tau^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + O(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\phi''(c)}\left\{\frac{1}{2}f''(c) - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]\right\} \\
&\qquad\qquad \cdot\left\{-\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\tau^{1/2} + O(\tau)\right\} \\
&\quad + O(\tau) \\
&= a_0\tau^{-1/2} + a_1 + a_2\tau^{1/2} + O(\tau) \\
&= \tau^{-1/2}\left[a_0 + a_1\tau^{1/2} + a_2\tau + O(\tau^{3/2})\right],\ \tau \to 0
\end{aligned}
$$

ただし

$$a_0 = -\frac{f(c)}{\phi''(c)}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}} = -\frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}},$$

$$a_1 = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\cdot\frac{\phi'''(c)}{6\phi''(c)} + \frac{1}{\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right] = \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

$$a_2 = -\frac{f(c)}{\phi''(c)}\cdot\frac{1}{12}\sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}\left\{\frac{\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}\cdot\frac{1}{\phi''(c)}\left\{\frac{1}{2}f''(c) - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\left[f'(c) - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2\phi''(c)}\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{[\phi''(c)]^2} - \frac{f(c)[\phi'''(c)]^2}{[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$-2\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{2\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{6[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{2[\phi''(c)]^2} + \frac{f(c)[\phi'''(c)]^2}{4[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\}$$

が得られる[16]。

以上をまとめると、積分 I_a は

$$I_a(k) = -e^{-k\phi(c)}\int_0^{\phi(a)-\phi(c)} F(\tau)e^{-k\tau}d\tau$$

と表され、関数 $F: [0, \phi(a)-\phi(c)] \to \mathbb{R}$ は

$$F(\tau) = \frac{f\left(\phi^{-1}(\tau+\phi(c))\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(\tau+\phi(c))\right)} = \tau^\alpha\left[a_0 + a_1\tau^\beta + a_2\tau^{2\beta} + O(\tau^{3\beta})\right],\ \tau \to 0$$

ただし

$$\alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},$$

$$a_0 = -\frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}},\ a_1 = \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2},$$

---

[16] I_b のときの係数を a_{0b}, a_{1b}, a_{2b}、I_a のときの係数を a_{0a}, a_{1a}, a_{2a} とすると
$$a_{0a} = -a_{0b}, a_{1a} = a_{1b}, a_{2a} = -a_{2b}$$
である。

$$a_2 = -\sqrt{\frac{1}{2\phi''(c)}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\}$$

と漸近展開される。したがって Watson's Lemma より

$$I_b(k) = -e^{-k\phi(c)}\left[\frac{a_0\Gamma(\alpha+\beta\cdot 0+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 0+1)}} + \frac{a_1\Gamma(\alpha+\beta\cdot 1+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 1+1)}} + \frac{a_2\Gamma(\alpha+\beta\cdot 2+1)}{k^{(\alpha+\beta\cdot 2+1)}}\right.$$

$$\left. +O\left(\frac{1}{k^{(\alpha+\beta\cdot 3+1)}}\right)\right]$$

$$= -e^{-k\phi(c)}\left[\frac{a_0\Gamma(1/2)}{k^{1/2}} + \frac{a_1\Gamma(1)}{k} + \frac{a_2\Gamma(3/2)}{k^{3/2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= e^{-k\phi(c)}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)k}}f(c) - \frac{1}{k}\left\{\frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{\phi'''(c)}{3[\phi''(c)]^2}\right\}\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{8\phi''(c)k^3}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2} + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\}$$

$$\left. + O(k^{-2})\right],\ k \to \infty$$

が得られる[17]。

以上より

17 ただし

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \tau^{-1}e^{-\tau^2}\cdot 2\tau d\tau = \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$
$$\Gamma(3/2) = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \left[t^{\frac{1}{2}}(-e^{-t})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(-e^{-t})dt$$
$$= (1/2)\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma(1/2)/2 = \sqrt{\pi}/2$$

である。

$$
\begin{aligned}
I(k) &= I_a(k) + I_b(k) \\
&= e^{-k\phi(c)}\left[2\sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)k}}f(c)\right. \\
&\qquad + 2\sqrt{\frac{\pi}{8\phi''(c)k^3}}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\} + O(k^{-2})\right] \\
&= e^{-k\phi(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(c)k}}\left[f(c) + \frac{1}{2k}\left\{\frac{f''(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{4[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi'''(c)}{[\phi''(c)]^2}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{5f(c)[\phi'''(c)]^2}{12[\phi''(c)]^3}\right\} + O(k^{-2})\right],\ k \to \infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

■

(2) Stationary phase method

Proposition 4.（Analog of Watson's Lemma） 次の形の積分を考える：

$$I(k)=\int_0^b f(t)e^{ik\mu t}\,dt \quad (b>0 \text{ or } b=\infty,\ \mu=\pm 1) \tag{20}$$

ただし

$$f(t)=t^{\alpha}g(t) \ \ (-1<\alpha\le 0) \tag{21}$$

と表すことができ、$g\in C^N[0,b]$ で $\forall n\in\{0,1,\dots,N\}, g^{(n)}(b)=0$ となる（$b=\infty$ のときには $g\in C^{\infty}[0,\infty)$ で $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{t\to\infty} g^{(n)}(t)=0$ である）ものとする。そのとき

$$I(k)=-A_N(k)+O(k^{-N}),\ \ k\to\infty \tag{22}$$

が成り立つ。ただし

$$A_N(k)=-\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{i\pi}{2}\mu(n+\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}g^{(n)}(0)k^{-(n+\alpha+1)} \tag{23}$$

である[18]。

Proof

関数 $h_0, h_{-n-1}:(0,\infty)\to\mathbb{C}\ (n=0,1,\dots,N-1)$ を

$$\begin{aligned}&h_0(t)=t^{\alpha}e^{ik\mu t}\\ &h_{-n-1}(t)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_t^{i\mu\infty}(z-t)^n z^{\alpha}e^{ik\mu z}\,dz \quad (n=0,1,\dots,N-1)\end{aligned} \tag{24}$$

と定義する。ここで積分路は $0\le|\arg z|\le\pi/2$ となるようにとる。そのとき(45)式第 2 式の積分は絶対収束する。実際、積分路を $z=t+i\mu\sigma,\sigma\ge 0$ ととると、$t>0,\ -1<\alpha\le 0$ に対して $|z|=|t+i\mu\sigma|\ge t$ すなわち $|z|^{\alpha}=|t+i\mu\sigma|^{\alpha}\le t^{\alpha}$ であるから、$k>0$ において

$$\begin{aligned}|h_{-n-1}(t)|&\le\frac{1}{n!}\int_t^{t+i\mu\infty}|z-t|^n|z|^{\alpha}\left|e^{ik\mu z}\right||dz|\\ &\le\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}|i\mu\sigma|^n|t+i\mu\sigma|^{\alpha}\left|e^{ik\mu(t+i\mu\sigma)}\right|d\sigma\\ &=\frac{t^{\alpha}}{n!}\int_0^{\infty}\sigma^n e^{-k\sigma}\,d\sigma=\frac{t^{\alpha}}{n!}\left\{\left[\sigma^n\frac{e^{-k\sigma}}{-k}\right]_0^{\infty}-\frac{n}{-k}\int_0^{\infty}\sigma^{n-1}e^{-k\sigma}\,d\sigma\right\}=\cdots\\ &=\frac{t^{\alpha}}{n!}\cdot\frac{n!}{k^n}\int_0^{\infty}e^{-k\sigma}\,d\sigma=\frac{t^{\alpha}}{k^{n+1}}\end{aligned} \tag{25}$$

が成り立つ[19]。この関数 $h_0,h_{-1},\dots,h_{-N}$ について

---

[18] 特に $N=1$ の場合には

$$A_1(k)=-e^{\frac{i\pi}{2}\mu(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\phi(0)k^{-(\alpha+1)}$$

より

$$I(k)=e^{\frac{i\pi}{2}\mu(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\phi(0)k^{-(\alpha+1)}+O(k^{-1}),\ \ k\to\infty$$

である。

$$\frac{d}{dt}h_{-n-1}(t)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left\{-\left[(z-t)^n z^\alpha e^{ik\mu z}\right]_{z=t} + \int_t^{i\mu\infty}\frac{d}{dt}(z-t)^n z^\alpha e^{ik\mu z}\,dz\right\}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}n(-1)\int_t^{i\mu\infty}(z-t)^{n-1}z^\alpha e^{ik\mu z}\,dz$$
$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_t^{i\mu\infty}(z-t)^{n-1}z^\alpha e^{ik\mu z}\,dz = h_{-n}(t) \quad (n=1,\dots,N-1)$$

および

$$\frac{d}{dt}h_{-1}(t) = \frac{d}{dt}\frac{(-1)^1}{0!}\int_t^{i\mu\infty}z^\alpha e^{ik\mu z}\,dz = t^\alpha e^{ik\mu t} = h_0(t)$$

が成り立つ[20]から、$g^{(n)}(b) = 0, n = 0,1,\dots,N-1$ であることを用いると

---

19 一般に

$$\left|\int_\alpha^\beta\{u(t)+iv(t)\}dt\right|^2 = \left|\int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt\right|^2 = \left\{\int_\alpha^\beta u(t)dt\right\}^2 + \left\{\int_\alpha^\beta v(t)dt\right\}^2$$
$$\le \left\{\int_\alpha^\beta |u(t)|dt\right\}\left\{\int_\alpha^\beta |u(s)|ds\right\} + \left\{\int_\alpha^\beta |v(t)|dt\right\}\left\{\int_\alpha^\beta |v(s)|ds\right\}$$
$$= \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta\{|u(t)||u(s)| + |v(t)||v(s)|\}dt\,ds$$

および

$$\left\{\int_\alpha^\beta |u(t)+iv(t)|dt\right\}^2 = \left\{\int_\alpha^\beta [u(t)^2+v(t)^2]^{\frac{1}{2}}dt\right\}^2$$
$$= \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta [u(t)^2+v(t)^2]^{\frac{1}{2}}[u(s)^2+v(s)^2]^{\frac{1}{2}}dt\,ds$$
$$= \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta [u(t)^2u(s)^2 + v(t)^2v(s)^2 + u(t)^2v(s)^2 + v(t)^2u(s)^2]^{\frac{1}{2}}dt\,ds$$

であり

$$[u(t)^2u(s)^2 + v(t)^2v(s)^2 + u(t)^2v(s)^2 + v(t)^2u(s)^2] - \{|u(t)||u(s)| + |v(t)||v(s)|\}^2$$
$$= u(t)^2v(s)^2 + v(t)^2u(s)^2 - 2|u(t)||u(s)||v(t)||v(s)|$$
$$= (|u(t)||v(s)| - |v(t)||u(s)|)^2 \ge 0$$

であるから

$$\left|\int_\alpha^\beta\{u(t)+iv(t)\}dt\right|^2 \le \left\{\int_\alpha^\beta |u(t)+iv(t)|dt\right\}^2$$

が成り立つ。

20 一般に $F(t) = \int_t^\infty f(u,t)du$ $\left(f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\right)$ に対して

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_{t+h}^\infty f(u,t+h)du - \int_t^\infty f(u,t)du\right\}$$
$$= \frac{1}{h}\left\{\int_t^\infty [f(u,t+h)-f(u,t)]du - \int_t^{t+h} f(u,t+h)du\right\}$$
$$= \int_t^\infty \frac{f(u,t+h)-f(u,t)}{h}du - \frac{\int_0^{t+h} f(u,t+h)du - \int_0^t f(u,t+h)du}{h}$$

であるから（積分と極限操作が可換ならば）$G(t_1,t_2) = \int_0^{t_1} f(u,t_2)du$ とおくと $G(*,t_2) \in C^1(\mathbb{R}), G(t_1,*) \in C(\mathbb{R})$ で

$$\lim_{h\to0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{h\to0}\int_t^\infty \frac{f(u,t+h)-f(u,t)}{h}du - \lim_{h\to0}\frac{G(t+h,t+h)-G(t,t+h)}{h}$$
$$= \int_t^\infty \lim_{h\to0}\frac{f(u,t+h)-f(u,t)}{h}du - \lim_{h\to0}\frac{\partial G}{\partial t_1}(t+\epsilon,t+h) \quad (0\le\epsilon\le h)$$
$$= \int_t^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(u,t)du - \frac{\partial G}{\partial t_1}(t,t)$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
I(k) &= \int_0^b h_0(t)g(t)dt \\
&= [h_{-1}(t)g(t)]_0^b - \int_0^b h_{-1}(t)g'(t)dt \\
&= h_{-1}(0)g(0) - \left\{[h_{-2}(t)g'(t)]_0^b - \int_0^b h_{-2}(t)g''(t)dt\right\} = \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n h_{-1-n}(0)g^{(n)}(0) + (-1)^N \int_0^b h_{-N}(t)g^{(N)}(t)dt
\end{aligned}
$$

と表すことができる。さらに、(45)式第 2 式において $z = t + i\mu\sigma$ とすると

$$
\begin{aligned}
h_{-n-1}(0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^{i\mu\infty} z^{n+\alpha}e^{ik\mu z}\,dz = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}(i\mu\sigma)^{n+\alpha}e^{-k\sigma}i\mu d\sigma \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(i\mu)^{n+\alpha+1}\int_0^{\infty}\sigma^{n+\alpha}e^{-k\sigma}d\sigma \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(i\mu)^{n+\alpha+1}\int_0^{\infty}\left(\frac{\nu}{k}\right)^{n+\alpha}e^{-\nu}\frac{d\nu}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{i\mu}{k}\right)^{n+\alpha+1}\int_0^{\infty}\nu^{n+\alpha}e^{-\nu}d\nu \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{i\mu}{k}\right)^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha+1) \quad (n = 0,1,\dots,N-1)
\end{aligned} \tag{26}
$$

であり、また(46)式より

$$
\left|\int_0^b h_{-N}(t)g^{(N)}(t)dt\right| \le \int_0^b |h_{-N}(t)|\left|g^{(N)}(t)\right|dt \le \frac{1}{k^N}\int_0^b t^\alpha\left|g^{(N)}(t)\right|dt
$$

が得られる [21]。したがって

$$
\begin{aligned}
I(k) &= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{i\mu}{k}\right)^{n+\alpha+1}g^{(n)}(0) + O(k^{-N}) \\
&= -\sum_{n=0}^{N-1}(i\mu)^{n+\alpha+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}g^{(n)}(0)\,k^{-(n+\alpha+1)} + O(k^{-N}) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}e^{\frac{i\pi}{2}\mu(n+\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}g^{(n)}(0)\,k^{-(n+\alpha+1)} + O(k^{-N})
\end{aligned}
$$

が成り立つ [22]。

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_t^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(u,t)du - \frac{d}{d\tau}\int_0^\tau f(u,t)du\bigg|_{\tau=t} = \int_t^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(u,t)du - f(t,t)$$

が成り立つ。

[21] $g \in C^N[0,b]$ で $\forall n \in \{0,1,\dots,N\}, \lim_{t\to b} g^{(n)}(t) = 0$ かつ $-1 < \alpha \le 0$ であるから

$$\int_0^b t^\alpha\left|g^{(N)}(t)\right|dt < \infty$$

が成り立つ。

[22] $i\mu = e^{\mu\frac{i\pi}{2}}$ である。

■

Proposition 5.（Stationary phase method） 次の形の積分を考える：

$$I(k)=\int_a^b f(t)e^{ik\phi(t)}dt \tag{27}$$

ただし $\phi, f\in C^\infty[a,b]$ で

$$\exists c\in[a,b],\ \phi'(c)=0, \phi''(c)\neq 0\ \text{ and }\ t\in[a,b]\setminus\{c\}\Rightarrow \phi'(t)\neq 0 \tag{28}$$

および

$$\forall n\in\mathbb{Z}_+,\ \lim_{t\to a} f^{(n)}(t)=\lim_{t\to b} f^{(n)}(t)=0 \tag{29}$$

が成り立つものとする。このとき、$I(k)$ は

$$I(k)=e^{\frac{i\pi}{4}\mu}f(c)\sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}}+O(k^{-1}),\ \ k\to\infty \tag{30}$$

と漸近展開することができる。ただし $\mu=\mathrm{sgn}\phi''(c)$ である。

Proof

積分 $I(k)$ を二つの和

$$I(k)=I_a(k)+I_b(k),\ \ I_a(k)=\int_a^c f(t)e^{ik\phi(t)}dt,\ I_b(k)=\int_c^b f(t)e^{ik\phi(t)}dt$$

に分割すると、(49)式の条件よりそれぞれの積分区間 $[a,c]$ および $[c,b]$ において $\phi(t)$ は単調減少または単調増加である。

まず積分 I_b を考える。その積分区間 $[c,b]$ において関数 $\phi:[c,b]\to\mathbb{R}$ は単調であるから、逆関数 ϕ^{-1} が存在し、したがって変数変換

$$\mu\tau=\phi(t)-\phi(c),\quad t=\phi^{-1}\big(\mu\tau+\phi(c)\big)$$

ただし

$$\mu=\mathrm{sgn}\phi''(c)=\ \mathrm{sgn}\phi'(t)\ (t\in[c,b])$$

を施すことができる：

$$\begin{aligned}I_b(k)&=\int_c^b f(t)e^{ik\phi(t)}dt\\ &=\int_0^{[\phi(b)-\phi(c)]/\mu} f\left(\phi^{-1}\big(\mu\tau+\phi(c)\big)\right)e^{ik(\mu\tau+\phi(c))}\frac{\mu d\tau}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\mu\tau+\phi(c)\big)\right)}\\ &=e^{ik\phi(c)}\int_0^{|\phi(b)-\phi(c)|}\frac{\mu f\left(\phi^{-1}\big(\mu\tau+\phi(c)\big)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\big(\mu\tau+\phi(c)\big)\right)}e^{ik\mu\tau}\,d\tau\end{aligned}$$

変数変換 $\mu\tau(t)=\phi(t)-\phi(c)$ の $t=c$ のまわりの漸近展開は

$$\tau(t)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2+o((t-c)^2)\right]=\frac{|\phi''(c)|}{2}(t-c)^2+o((t-c)^2)$$

であるが、これに $t-c$ の τ に関する漸近展開[23]

$$t-c=A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha}),\ \tau\to 0$$

を代入すると

$$\tau=\frac{|\phi''(c)|}{2}[A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha})]^2+o(\tau^{2\alpha})$$

であるから

$$1=2\alpha,\ \ 1=\frac{|\phi''(c)|}{2}A^2$$

すなわち

$$\alpha=\frac{1}{2},A=\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}$$

でなければならない。したがって、$t-c$ の τ に関する漸近展開は

$$t-c=\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}\tau^{1/2}+o\left(\tau^{1/2}\right),\ \tau\to 0$$

と表される。また $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開を

$$\frac{1}{t-c}=A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha}),\ \tau\to 0$$

とすると

$$1=[\,A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha})]\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}\tau^{1/2}+o\left(\tau^{1/2}\right)\right],\ \tau\to 0$$

より

$$0=\alpha+\frac{1}{2},\ 1=A\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}$$

したがって

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ A=\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}$$

であるから

[23] $t=c\Leftrightarrow\tau=0$ であるから漸近展開の定数項は０、したがって $\alpha\neq 0$ である。また $t\in(c,b)\Leftrightarrow\tau\in\left(0,\mu\left(\phi(b)-\phi(c)\right)\right)=(0,|\phi(b)-\phi(c)|)$ であるから $A\geq 0$ である。

$$\frac{1}{t-c} = \sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right),\ \tau \to 0 \tag{31}$$

となる。

一方、関数 $f(t)$ と $\phi'(t)$ を $t=c$ のまわりで Taylor 級数展開すると

$$f(t) = f(c) + O((t-c)^1),$$

$$\phi'(t) = (t-c)\phi''(c) + O((t-c)^2),\ t \to c$$

であるから、$f(t)/\phi'(t)$ の $t=c$ のまわりの漸近展開

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = A(t-c)^\alpha + o((t-c)^\alpha),\ \ \tau \to 0$$

において

$$f(c) + O((t-c)^1) = [A(t-c)^\alpha + O((t-c)^\alpha)] \cdot [(t-c)\phi''(c) + O((t-c)^2)]$$

したがって

$$0 = \alpha + 1,\ f(c) = A\phi''(c)$$

すなわち

$$\alpha = -1,\ \ A = \frac{f(c)}{\phi''(c)}$$

が成り立たなければならない。故に $f(t)/\phi'(t)$ の $t=c$ のまわりの漸近展開は

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}(t-c)^{-1} + o((t-c)^{-1}),\ t \to c$$

と表されるが、$1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開（(52)式）より

$$\frac{f\left(\phi^{-1}\left(\tau - \phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau - \phi(c)\right)\right)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\left[\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right)\right] + o\left(\tau^{-1/2}\right)$$

$$= a_0\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right)$$

ただし

$$a_0 = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}} = \frac{\mu f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}$$

が得られる。

以上をまとめると、積分 I_b は

$$I_b(k) = e^{ik\phi(c)}\int_0^{|\phi(b)-\phi(c)|} F(\tau)e^{-i\mu k\tau}\,d\tau$$

と表され、関数 $F\colon [0, |\phi(b)-\phi(c)|] \to \mathbb{R}$ は

$$F(\tau) = \frac{\mu f\left(\phi^{-1}(\tau + \phi(c))\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(\tau + \phi(c))\right)} = \tau^{\alpha}[a_0 + o(1)],\ \tau \to 0$$

ただし

$$\alpha = -\frac{1}{2}, a_0 = \frac{f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}$$

と漸近展開される[24]。さらに(50)式より任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\lim_{\tau \to |\phi(b)-\phi(c)|} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n F(\tau) = \lim_{\tau \to [\phi(b)-\phi(c)]/\mu} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \frac{\mu f\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)} = 0$$

が成り立つから、Proposition 4 より

$$\begin{aligned} I_b(k) &= e^{\frac{i\pi}{2}\mu(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)a_0 k^{-(\alpha+1)} + O(k^{-1}) \\ &= e^{\frac{i\pi}{4}\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}) \\ &= e^{\frac{i\pi}{4}\mu} f(c)\sqrt{\frac{\pi}{2|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}),\ \ k \to \infty \end{aligned} \tag{32}$$

が得られる。

積分 I_a の場合も同様に変数変換

$$\mu\tau = \phi(t) - \phi(c), \quad t = \phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))$$

ただし

$$\mu = \mathrm{sgn}\phi''(c) = -\,\mathrm{sgn}\phi'(t)\ (t \in [a, c])$$

によって

$$\begin{aligned} I_a(k) &= \int_a^c f(t)e^{ik\phi(t)}dt \\ &= \int_{(\phi(a)-\phi(c))/\mu}^{0} f\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)e^{ik(\mu\tau+\phi(c))}\frac{\mu d\tau}{\phi'\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)} \\ &= -e^{ik\phi(c)}\int_0^{|\phi(a)-\phi(c)|}\frac{\mu f\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(\mu\tau + \phi(c))\right)}e^{ik\mu\tau}d\tau \end{aligned}$$

と変換することができる。

この場合も変数変換 $\mu\tau(t) = \phi(t) - \phi(c)$ の $t = c$ のまわりの漸近展開は

---

[24] Proposition 4 を適用するためには $F(\tau)\tau^{-\alpha} \in C^{\infty}[0, |\phi(b) - \phi(c)|]$ が成り立たなければならず、そのためには $F(\tau) = \tau^{\alpha}[a_0 + O(\tau)], \tau \to 0$ でなければならない。これは一般には成り立たない。

$$\tau(t)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2+o((t-c)^2)\right]=\frac{|\phi''(c)|}{2}(t-c)^2+o((t-c)^2)$$

であるが、これに $t-c$ の τ に関する漸近展開[25]

$$t-c=A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha}),\ \tau\to 0$$

を代入すると

$$\tau=\frac{|\phi''(c)|}{2}[A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha})]^2+o(\tau^{2\alpha})$$

であるから

$$1=2\alpha,\ \ 1=\frac{|\phi''(c)|}{2}A^2$$

すなわち

$$\alpha=\frac{1}{2}, A=-\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}$$

でなければならない。したがって、$t-c$ の τ に関する漸近展開は

$$t-c=-\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}\tau^{1/2}+o\left(\tau^{1/2}\right),\ \tau\to 0$$

と表される。また $1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開を

$$\frac{1}{t-c}=A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha}),\ \tau\to 0$$

とすると

$$1=[\,A\tau^{\alpha}+o(\tau^{\alpha})]\cdot\left[-\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}\tau^{1/2}+o\left(\tau^{1/2}\right)\right],\ \tau\to 0$$

より

$$0=\alpha+\frac{1}{2},\ 1=-A\sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|}}$$

したがって

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ A=-\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}$$

であるから

---

[25] $t=c\Leftrightarrow\tau=0$ であるから漸近展開の定数項は０、したがって $\alpha\neq 0$ である。また $t\in(a,c)\Leftrightarrow\tau\in\left(0,\mu\left(\phi(a)-\phi(c)\right)\right)=(0,|\phi(a)-\phi(c)|)$ であるから $A\leq 0$ である。

$$\frac{1}{t-c} = -\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right),\ \tau \to 0 \tag{33}$$

となる。

$f(t)/\phi'(t)$ の $t=c$ のまわりの漸近展開は I_b の場合と全く同様に

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}(t-c)^{-1} + o((t-c)^{-1}),\ t \to c$$

と表されるが、$1/(t-c)$ の τ に関する漸近展開（(54)式）より

$$\frac{f\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau-\phi(c)\right)\right)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\left[-\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}}\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right)\right] + o\left(\tau^{-1/2}\right)$$

$$= -a_0\tau^{-1/2} + o\left(\tau^{-1/2}\right)$$

ただし

$$a_0 = \frac{f(c)}{\phi''(c)}\sqrt{\frac{|\phi''(c)|}{2}} = \frac{\mu f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}$$

が得られる。

以上をまとめると、積分 I_a は

$$I_a(k) = e^{ik\phi(c)}\int_0^{|\phi(a)-\phi(c)|} F(\tau)e^{-i\mu k\tau}\,d\tau$$

と表され、関数 $F\colon [0, |\phi(a)-\phi(c)|] \to \mathbb{R}$ は

$$F(\tau) = -\frac{\mu f\left(\phi^{-1}\left(\tau+\phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\tau+\phi(c)\right)\right)} = \tau^{\alpha}[a_0 + o(1)],\ \tau \to 0$$

ただし

$$\alpha = -\frac{1}{2}, a_0 = \frac{f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}$$

と漸近展開される。さらに(50)式より任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\lim_{\tau \to |\phi(a)-\phi(c)|}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^n F(\tau) = \lim_{\tau \to [\phi(a)-\phi(c)]/\mu}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \frac{\mu f\left(\phi^{-1}\left(\mu\tau+\phi(c)\right)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\mu\tau+\phi(c)\right)\right)} = 0$$

が成り立つから、Proposition 4 より

$$
\begin{aligned}
I_a(k) &= e^{\frac{i\pi}{2}\mu(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)a_0 k^{-(\alpha+1)} + O(k^{-1}) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4}\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{f(c)}{\sqrt{2|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4}\mu} f(c)\sqrt{\frac{\pi}{2|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}),\ \ k \to \infty
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
I(k) = I_a(k) + I_b(k) &= 2e^{\frac{i\pi}{4}\mu} f(c)\sqrt{\frac{\pi}{2|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4}\mu} f(c)\sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(c)|}}k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}),\ \ k \to \infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(3) Method of steepest descent

Proposition 6.（Method of Steepest Descent） 次の形の積分を考える：

$$I(k)=\int_C f(z)e^{k\phi(z)}dz \tag{34}$$

ただし積分路 $C:[a,b]\to\mathbb{C}$ は区分的に滑らかな関数で $f,\phi:D\to\mathbb{C}$ は積分路を含む領域 $D\subset\mathbb{C}$（ $C([a,b])\subset D$ ）上に定義される解析関数とする。

関数 $\phi(z)=u(z)+iv(z)$（ただし $u=\Re\phi:D\to\mathbb{R}, v=\Im\phi:D\to\mathbb{R}$）において、積分路 C' を $z\in C'\Rightarrow v(z)=v_0$:const. となるようにとると、積分は

$$I(k)=\int_{C'} f(z)e^{k(u(z)+iv_0)}dz=e^{ikv_0}\int_{C'} f(z)e^{ku(z)}dz$$
$$=e^{ikv_0}\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)e^{ku\left(z(t)\right)}dt$$

（ただし $C'=\{z(t)\in\mathbb{C}|\ a\le t\le b\}$ ）とLaplace積分に帰着される[26]。$v(z)=v_0$ を満たす曲線は、複素平面上で $u(z)$ の減少が最も大きい方向または $u(z)$ の増加が最も大きい方向に沿っている。

Proof

$z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$ とし、$u(z)=u(x,y), v(z)=v(x,y)$ とすると、Cauchy-Riemann の方程式より $(\partial u/dx,\partial u/\partial y)=(\partial v/\partial y,-\partial v/\partial x)$ であるから

$$\nabla u\cdot\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

したがって、（$\nabla u\neq 0,\nabla v\neq 0$ のときには）u の最大変化方向 ∇u と曲線 $v=\text{const.}$ の法線ベクトル ∇v は直交する。これは曲線 $v=\text{const.}$ が u の最大変化方向 ∇u に沿っていることを示している。

もしくは、任意の点 $z_0\in D$ において $n=\min\{m\in\mathbb{N}|\phi^{(m)}(z_0)\neq 0\}$ とし、$\phi^{(n)}(z_0)=ae^{i\alpha}$ とおくと ϕ は解析関数であるから

$$\begin{aligned}\phi(z)-\phi(z_0)&=\phi^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n+o(|z-z_0|^n)\\&=ae^{i\alpha}\left(\rho e^{i\theta}\right)^n+o(\rho^n)\\&=a\rho^n e^{i(\alpha+n\theta)}+o(\rho^n)\end{aligned}$$

である（ただし $z-z_0=\rho e^{i\theta}$ とおいた）から

$$u(z)-u(z_0)=a\rho^n\cos(\alpha+n\theta)+o(\rho^n),$$
$$v(z)-v(z_0)=a\rho^n\sin(\alpha+n\theta)+o(\rho^n)$$

が得られる。したがって、十分小さな ρ に対して

---

[26] これに対して積分路 C'' を $z\in C'\Rightarrow u(z)=u_0$:const. となるようにとると、積分は

$$I(k)=\int_{C''} f(z)e^{k(u_0+iv(z))}dz=e^{ku_0}\int_{C'} f(z)e^{ikv(z)}dz$$

と一般化 Fourier 積分に帰着される。

$$z_{sd} = z_0 + \rho e^{i\theta_{sd}},\ \ u(z_{sd}) - u(z_0) = \min_{|z|=\rho}\{u(z) - u(z_0)\},$$

$$z_{sa} = z_0 + \rho e^{i\theta_{sa}},\ \ u(z_{sa}) - u(z_0) = \max_{|z|=\rho}\{u(z) - u(z_0)\}$$

とすると

$$\cos(\alpha + n\theta_{sd}) = -1 \quad \therefore \theta_{sd} = -\frac{\alpha}{n} + \frac{(2m+1)\pi}{n}\ \ (m = 0, \dots, n-1),$$

$$\cos(\alpha + n\theta_{sa}) = 1 \quad \therefore \theta_{sa} = -\frac{\alpha}{n} + \frac{2m\pi}{n}\ \ (m = 0, \dots, n-1)$$

が成り立つ。そのとき $\sin(\alpha + n\theta_{sd}) = \sin(\alpha + n\theta_{sa}) = 0$ であるから

$$v(z_{sd}) - v(z_0) = O(\rho^n),$$
$$v(z_{sa}) - v(z_0) = O(\rho^n)$$

が成り立つ。

Example 1.（分散波動の場合）

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\chi(\kappa)t} d\kappa \tag{35}$$

の $t \to \infty$ における漸近挙動を考える。ここで $\chi(\kappa) = W(\kappa) - \kappa x/t$ であり、分散波動の条件から $\chi''(\kappa) = W''(\kappa) \neq 0$ である。関数 $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ および $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はともに解析関数であることを仮定する。$\phi(\kappa) = -i\chi(\kappa)$ とすれば、(35)式の積分は(34)式の形に表せる。

関数 $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の停留点を $\kappa = k_j\ (j = 1, \dots, n)$ とすると、$\phi''(k_j) = -i\chi''(k_j) \neq 0$ であるから、上記 Proposition 6 の議論において $\alpha = \arg\phi''(k_j) = -(\pi/2)\mathrm{sgn}\chi''(k_j)$ より

$$\theta_{sd1} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k_j) + \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_{sd2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k_j) - \frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$\mathrm{sgn}\chi''(k_j) = 1 \Rightarrow \theta_{sd1} = \frac{3}{4}\pi,\ \theta_{sd2} = -\frac{1}{4}\pi,$$

$$\mathrm{sgn}\chi''(k_j) = -1 \Rightarrow \theta_{sd1} = \frac{1}{4}\pi,\ \theta_{sd2} = -\frac{3}{4}\pi$$

となる。

したがって、積分路を

$$\kappa(s) - k_j = se^{i\theta},\ \ \theta = -\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k_j)$$

ととると、(35)式の積分は

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k_j+se^{i\theta}\right)e^{-i\chi\left(k_j+se^{i\theta}\right)t}e^{i\theta}ds=e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-t\phi(s)}ds$$

ただし

$$\phi(s)=i\chi\left(k_j+se^{i\theta}\right)=\phi(0)+\frac{s^2}{2}\phi''(0)+\frac{s^3}{6}\phi'''(0)+\frac{s^4}{24}\phi^{(4)}(0)+O(s^5)$$

$$=i\left[\chi\left(k_j\right)+\frac{s^2}{2}e^{2i\theta}\chi''\left(k_j\right)+\frac{s^3}{6}e^{3i\theta}\chi'''\left(k_j\right)+\frac{s^4}{24}e^{4i\theta}\chi^{(4)}\left(k_j\right)+O(s^5)\right]$$

および

$$f(s)=F\left(k_j+se^{i\theta}\right)=f(0)+sf'(0)+\frac{s^2}{2}f''(0)+O(s^3)$$

$$=F\left(k_j\right)+se^{i\theta}F'\left(k_j\right)+\frac{s^2}{2}e^{2i\theta}F''\left(k_j\right)+O(s^3)$$

と表せる。したがって、Laplace's method より

$$\varphi(t)\sim e^{i\theta}e^{-t\phi(0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(0)|t}}\left[f(0)+\frac{1}{2t}\left\{\frac{f''(0)}{\phi''(0)}-\frac{f(0)\phi^{(4)}(0)}{4[\phi''(0)]^2}-\frac{f'(0)\phi'''(0)}{[\phi''(0)]^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5f(0)[\phi'''(0)]^2}{12[\phi''(0)]^3}\right\}+O(t^{-2})\right],\ t\to\infty$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &\sim e^{-ti\chi(k_j)+i\theta}\sqrt{\frac{2\pi}{ie^{2i\theta}\chi''(k_j)t}} \\
&\quad \cdot\left[F(k_j)+\frac{1}{2t}\left\{\frac{e^{2i\theta}F''(k_j)}{ie^{2i\theta}\chi''(k_j)}-\frac{F(k_j)ie^{4i\theta}\chi^{(4)}(k_j)}{4[ie^{2i\theta}\chi''(k_j)]^2}-\frac{e^{i\theta}F'(k_j)ie^{3i\theta}\chi'''(k_j)}{[ie^{2i\theta}\chi''(k_j)]^2}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{5F(k_j)[ie^{3i\theta}\chi'''(k_j)]^2}{12[ie^{2i\theta}\chi''(k_j)]^3}\right\}+O(t^{-2})\right] \\
&= e^{-i\chi(k_j)t+i\theta}\sqrt{\frac{2\pi}{ie^{2i\theta}\chi''(k_j)t}} \\
&\quad \cdot\left[F(k_j)+\frac{1}{2t}\left\{\frac{F''(k_j)}{i\chi''(k_j)}-\frac{(-i)F(k_j)\chi^{(4)}(k_j)}{4[\chi''(k_j)]^2}-\frac{(-i)F'(k_j)\chi'''(k_j)}{[\chi''(k_j)]^2}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{5F(k_j)[\chi'''(k_j)]^2}{12i[\chi''(k_j)]^3}\right\}+O(t^{-2})\right] \\
&= e^{-i\chi(k_j)t-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k_j)}\sqrt{\frac{2\pi}{|\chi''(k_j)|t}} \\
&\quad \cdot\left[F(k_j)-\frac{i}{t}\left\{\frac{F''(k_j)}{2\chi''(k_j)}-\frac{F(k_j)\chi^{(4)}(k_j)}{8[\chi''(k_j)]^2}-\frac{F'(k_j)\chi'''(k_j)}{2[\chi''(k_j)]^2}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{5F(k_j)[\chi'''(k_j)]^2}{24[\chi''(k_j)]^3}\right\}+O(t^{-2})\right],\ t\to\infty
\end{aligned}
$$

が得られる[27]。

---

27 ここで $ie^{2i\theta}=e^{i(2\theta+\pi/2)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\chi''(k_j)+\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{sgn}\chi''(k_j)$ なる関係を用いた。因みに $ie^{2i\theta}=e^{i(2\theta+\pi/2)}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\chi''(k_j)-\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{sgn}\chi''(k_j),\theta=\theta_{sd1},\theta_{sd2}$ も成り立つ。