

## 11. Linear Dispersive Waves

2010/04 鈴木幸人

Part1 の議論は主に双曲型の系に関係していた。ほとんどの波動は（普通にみられる水面波も含めて）まず第一には双曲型の方程式で記述されない。後のステージで、攪乱に関する重要な平均量の伝播を記述する際に、双曲型の方程式とのつながりがでてくる。しかし、これらを扱うには双曲型方程式とは違った基本概念と数学的手法を展開しなければならない。

これらの非双曲型波動は、分散波と呼ばれる 2 番目の主要なクラスに大きく分類することができる。一般的に、このクラス分けは双曲型波動の場合よりも厳密ではない。なぜなら、それは方程式自身で区分されるのではなく、解のタイプによって区分されるからである。しかし、ある限られた問題のクラスでは正確に区分することができ、またそれを自然な方法で拡張したり類推することによって続けていくことができる。ある少数の特別な方程式は双曲型の挙動と分散型の挙動を同時に示すことを付け加えておく。それぞれの挙動はそれぞれ異なった領域において現れる。しかしこれらは例外である。

最初の 2 つの章では線型系に対する一般概念を展開する。13 章では水面波を扱う。これは、それ自身が魅力的な研究対象であるばかりでなく、分散波動の多くのアイデアが最初にそこで開発された。13 章では、この水面波という特別な場合について非線型分散波動の扱いが開始される。これは、14 章と 15 章における非線型分散波動の一般的な展開のバックグラウンドを提供する。16 章では種々の応用を扱う。最終章はソリトン波と特殊な方程式の最近の研究を紹介する。

### 11.1 Dispersion Relations

線型問題では、分散波動は通常正弦曲線状の波列

$$\varphi(x, t) = Ae^{ik \cdot x - i\omega t} \tag{1}$$

の形の基本解をもつということ認識される。ここで  $\kappa \in \mathbb{R}^3$  は波数、 $\omega \in \mathbb{R}$  は振動数、 $A \in \mathbb{C}$  は振幅である。基本解では  $\kappa, \omega, A$  は定数である。方程式は線型であるから  $A$  は共通因子となり任意の値をとる。しかし方程式を満たすためには  $\kappa$  と  $\omega$  の間にある関係

$$G(\omega, \kappa) = 0$$

が成り立たなければならない。この  $G$  の関数形はそれぞれの問題における方程式によって決まる。例えば、 $\varphi$  が梁の方程式

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0$$

を満たすならば

$$[(-i\omega)^2 + \gamma^2 (i\kappa)^4] Ae^{ik \cdot x - i\omega t} = 0$$

より

$$-\omega^2 + \gamma^2 \kappa^4 = 0$$

が成り立たなければならぬ。この  $\omega$  と  $\kappa$  の関係を分散関係と呼ぶ。後に示すように、一旦分散関係が分かれば方程式の方は必要が無くなる。逆に、分散関係式からそれに対応する方程式を構築することができる。

分散関係は

$$\omega = W(\kappa) \tag{2}$$

の形に解くことができると想定する。一般には、そのような解は複数存在し、それぞれ異なった関数  $W(\kappa)$  が対応する。そのそれぞれをモードと言う。例えば梁の方程式の場合には、2つのモード

$$\omega = \gamma \kappa^2, \quad \omega = -\gamma \kappa^2$$

が存在する。線型問題の場合、複数のモードを重ね合わせることによって完全な解を構成することができるので、さしあたり一つのモードを考える。また、線型性によって(1)式に示したように複素形で扱うことが可能である。必要なときには、その実数部分をとることができる。すなわち、実際の解は

$$\Re \varphi = \Re(|A| e^{i\eta} e^{i\kappa \cdot x - i\omega t}) = |A| \cos(\kappa \cdot x - \omega t + \eta), \quad \eta = \arg A$$

である。

$$\theta = \kappa \cdot x - \omega t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

なる量は位相 (phase) と呼ばれる。これは波頭 ( $\Re \varphi$  が最大になる場所) と波の谷 ( $\Re \varphi$  が最小になる場所) の間のその周期における位置を定めるものである。この平面波解では、 $\theta = \text{const.}$  で定まる波面は互いに平行な平面である<sup>1</sup>。  $\theta$  の勾配は波数  $\kappa$  であり、その方向は波面に垂直で、その大きさはその方向に (時間を固定して)  $2\pi$  だけ進んだときに現れる波頭の平均数である。同様に  $-\theta_t$  は振動数  $\omega$  であり、(位置を固定して) 時間が  $2\pi$  だけ進んだときに現れる波頭の平均数である ( $2\pi$  を単位とする規格化は三角関数を扱う上で便利である)。波長は  $\lambda = 2\pi/|\kappa|$  で周期は  $\tau = 2\pi/\omega$  である。

波の運動は(3)式から見てとれる。どんな波面も  $\kappa$  方向に速度  $\omega/|\kappa|$  で動いている<sup>2</sup>。そこで

$$c = \frac{\omega}{|\kappa|} \hat{\kappa} \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

を位相速度と呼ぶ。ここで  $\hat{\kappa} \in \mathbb{R}^3$  は  $\kappa$  方向の単位ベクトルである。どのようなモード  $\omega = W(\kappa)$  においても位相速度は  $\kappa$  の関数である。これに対して波動方程式  $\varphi_{tt} = c_0^2 \nabla^2 \varphi$  の場合には、その分散関係式は  $\omega = \pm c_0 |\kappa|$  であり、したがって位相速度は  $c = \pm c_0$  となって通常の伝播速度に一致する。しかし一般には  $c$  は  $\kappa$  と独立ではない。異なる波数は

<sup>1</sup> 時間  $t = t_0$  を固定したとき  $\theta = \theta_0: \text{const.}$  を満たす  $x$  の集合は  $\{x \in \mathbb{R}^3 | \kappa \cdot x = \theta_0 + \omega t_0\}$  である。

<sup>2</sup> 実際  $\theta = \kappa \cdot x(t) - \omega t = \text{const.}$  ならば  $\frac{d\theta}{dt} = \kappa \cdot \frac{dx}{dt} - \omega = 0$  したがって  $\frac{dx}{dt} \cdot \hat{\kappa} = \omega/|\kappa|$  である。

異なる位相速度をもつ。このことが“分散”という言葉の理由である。より一般的な解の Fourier 級数展開において、それぞれ異なる波数をもつ成分は時間が経つとともに分散していく。

分類に関していえば、分散波のクラスから  $c = \text{const.}$  の場合を除かなければならない。その場合には分散は起こらないだろうからである。また分散関係を(2)式のように解いたとき、それは実数でなければならないことも明らかである。熱方程式  $\varphi_t = \nabla^2 \varphi$  は  $\omega = -i\kappa^2$  であるとき(1)式の形の解をもつ。しかしこの解は波のように振舞わない<sup>3</sup>。このような望まないケースを除くために、まず分散という言葉を決る条件を満たすときのみ用いることにする。すなわち

$$\omega = W(\kappa) \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j} \right) \neq 0 \quad (5)$$

であるとき(1)式の形の解（の総和）を分散波と呼ぶ。

次元問題では2つ目の条件は

$$W''(\kappa) \neq 0$$

となる。これは  $c'(\kappa) \neq 0$  よりも幾らか強い条件である。実際、これは  $W = a\kappa + b$  なる場合も除くことになる。その理由は後に詳述するが、次元の場合には次のことが言えることをあらかじめ注意しておく。すなわち、群速度  $W'(\kappa)$  はより重要な伝播速度であり、上記の条件  $W''(\kappa) \neq 0$  はそれが定数でないことを保証するものである。 $W = a\kappa + b$  なるケースが実は分散的ではないことを直接示すことができる。その基本解は

$$\varphi(x, t) = Ae^{i\kappa x - iW(\kappa)t} = Ae^{i\kappa(x - at) - ibt}$$

であるから、Fourier 成分の重ね合わせとして

$$e^{-ibt} f(x - at)$$

なる形の一般解が得られる。初期の波形  $f(x)$  はそれが伝播するにつれて変化するが分散はしない。その支配方程式は双曲型であることを容易に示すことができる。

(5)式の行列式は  $\kappa$  の特別な値の近く（例えば  $|\kappa| \rightarrow 0$  もしくは  $|\kappa| \rightarrow \infty$  の極限）において0になっていくことも考えられる。これらの極限值は一般的な定式化における特異点として特別な考察が要求されるであろう。

### — 例 —

一般的な理論の展開を説明するため、幾つかの典型的な例が用いられる。

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{\alpha^2 |\kappa|^2 + \beta^2} \quad (6)$$

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \beta^2 \nabla^2 \varphi_{tt}, \quad \omega = \pm \frac{\alpha |\kappa|}{\sqrt{1 + \beta^2 |\kappa|^2}} \quad (7)$$

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0, \quad \omega = \pm \gamma \kappa^2 \quad (8)$$

<sup>3</sup> 実際  $\varphi(x, t) = Ae^{i\kappa \cdot x - i(-i\kappa^2)t} = Ae^{i\kappa \cdot x} e^{-\kappa^2 t}$  であるから各 Fourier 成分は波数の2乗に対応して指数関数的に減衰する。

$$\varphi_t + \alpha\varphi_x + \beta\varphi_{xxx} = 0, \quad \omega = \alpha\kappa - \beta\kappa^3 \quad (9)$$

これらのうち最初のもは双曲型であるが、それにもかかわらず(5)式を満足する分散的な解をもつ。これは変位  $\varphi$  に関する振動で  $\varphi$  に比例する復元力がある場合を表しており、また量子力学における Klein-Gordon 方程式でもある。その他の方程式は双曲型ではなく、より典型的な例である。(7)式は、弾性論における棒の縦波、水面波における長波に対する Boussinesq 近似、そしてプラズマ波動において現れる。(8)式は梁の曲げ振動の方程式である。(9)式も水面波の長波に関するもので、Korteweg-deVries 方程式を線型化したものである。水面波に関する方程式の導出については後に詳細に調べる。その他のものについてはある程度周知であるものとする。

### — 方程式と分散関係との対応 —

これらの例から明白であり、また一般的にも明らかであるが、実係数の方程式からは、それが全て偶数次の微分からなるか、もしくは全て奇数次の微分からなるときにのみ実数の分散関係が導かれる。それぞれの微分からは係数  $i$  がでてくる。偶数次の微分は実数の係数に、奇数次の微分は純虚数の係数になるから、最終的に分散関係が実数となるためには両者が混在することはできない。Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi \quad (10)$$

は奇数次と偶数次の微分が混在し、かつ実数の分散関係

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 |\kappa|^2}{2m}$$

を導くが、これは複素係数をもつからである。

方程式と分散関係の対応を更に進めることができる。単独の定数係数線型微分方程式は

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi = 0$$

と表すことができる。ここで  $P$  は多項式である。(1)式の形の基本解を代入したとき、それぞれの  $\partial/\partial t$  からは係数  $-i\omega$  が、それぞれの  $\partial/\partial x_j$  からは係数  $i\kappa_j$  がでてくる。その結果、分散関係は

$$P(-i\omega, i\kappa_1, i\kappa_2, i\kappa_3) = 0 \quad (11)$$

と表される。すなわち、対応

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \leftrightarrow i\kappa_j$$

によって方程式と分散関係を直接対応づけることができる。特に、(11)式の分散関係から対応する方程式を得ることができる。これが、以前に分散関係式が得られたならば方程式を捨ててしまってもよいとコメントした理由である。

しかしながら、このタイプの方程式（微分方程式）は多項式の分散関係しか与えること

ができない。自然な疑問として、どのような種類の作用素がより一般の分散関係を与えるだろうかと問うことができる。一つの可能性として、(1)式で表されるような振動する波の運動が幾つかの空間方向についてのみ起こり、残りの方向にはより複雑な振舞いをする場合が考えられる。典型的な例は深水波の理論である。そこでは、後に見るように、波は水平方向に伝播するが鉛直方向の変化は振動的ではない。もう一つの可能性は（それは全ての座標変数について波のような振舞いをするが）、一次元の場合には例えば次の積分微分方程式で表されるような場合である。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (12)$$

ここで核関数  $K(x)$  は与えられた関数である。この方程式は

$$-i\omega e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) i k e^{ik\xi} d\xi = 0$$

なる関係が成り立つとき、 $\varphi = A e^{ikx - i\omega t}$  の形の基本解をもつ。この条件は

$$c = \frac{\omega}{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \quad (13)$$

とまとめることができる<sup>4</sup>。その右辺は与えられた核関数  $K$  のFourier変換  $\mathcal{F}K$  であり、逆変換定理より

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\kappa) e^{ikx} d\kappa \quad (14)$$

が得られる。以上のことから、任意の  $c(\kappa)$  したがって任意の分散関係式を与えるように(12)式の形の方程式を構築することができる。実際、任意の  $c(\kappa)$  に対して、単にそのFourier逆変換 ((14)式) を核関数とすればよい。特に

$$c(\kappa) = c_0 + c_2 \kappa^2 + \dots + c_{2m} \kappa^{2m}$$

とすると

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + \dots + (-1)^m c_{2m} \delta^{(2m)}(x)$$

であり<sup>5</sup>、(12)式は微分方程式

<sup>4</sup> 実際  $\omega = e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \kappa e^{ik\xi} d\xi = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{-ik(x - \xi)} d\xi$  である。

<sup>5</sup> Schwarz の急減少関数の空間を  $\mathcal{S}$  とし、緩増加超関数の空間を  $\mathcal{S}'$  とすると、 $K = c_0 \delta - c_2 \delta'' + \dots + (-1)^m c_{2m} \delta^{(2m)} \in \mathcal{S}'$  であるから、任意の  $u \in \mathcal{S}$  に対して

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}K, u) &= (K, \mathcal{F}u) = c_0 \mathcal{F}u(0) - c_2 (\mathcal{F}u)''(0) + \dots + (-1)^m c_{2m} (\mathcal{F}u)^{(2m)}(0) \\ &= c_0 \int_{\mathbb{R}} u(\kappa) e^{-ikx} d\kappa \Big|_{x=0} - c_2 \int_{\mathbb{R}} u(\kappa) (-ik)^2 e^{-ikx} d\kappa \Big|_{x=0} + \dots \\ &\quad + (-1)^m c_{2m} \int_{\mathbb{R}} u(\kappa) (-ik)^{2m} e^{-ikx} d\kappa \Big|_{x=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (c_0 + c_2 \kappa^2 + \dots + c_{2m} \kappa^{2m}) u(\kappa) d\kappa = \int_{\mathbb{R}} c(\kappa) u(\kappa) d\kappa \end{aligned}$$

したがって  $\mathcal{F}K = c \in \mathcal{S}'$  すなわち  $K = \mathcal{F}^{-1}c$  が成り立つ。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots + (-1)^m c_{2m} \frac{\partial^{2m+1} \varphi}{\partial x^{2m+1}} = 0$$

に帰着する。 $c(\kappa)$  が  $\kappa$  のべき級数である無限 Taylor 級数として表されるより一般の関数である場合には、対応する方程式は微分の無限級数として表される微分方程式となる。このことは実質的に(12)式に要約されている。

### — 分散波動の定義 —

以上のことから、線型分散波動とは、条件 ((5)式) :

$$\omega = W(\kappa) \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j} \right) \neq 0$$

を満たすような分散関係 ((2)式) :

$$\omega = W(\kappa)$$

のもとで

$$\varphi(x, t) = A e^{ik \cdot x - i\omega t}$$

なる形 ((1)式) の解をもつものと定義することができる。(6)式の例にみるように放物型の系といくらかの重複があるが、通常は系は放物型ではない。最後のパラグラフでみたように、対象を微分方程式に限る必要はない。

しかし、この定義が狭すぎることはすぐに明らかになる。線型微分方程式に限っても、この定義では定数係数に制限されてしまう。例えば、梁の方程式において  $\gamma$  が  $x$  に依存する場合には

$$\varphi_{tt} + \gamma^2(x) \varphi_{xxxx} = 0$$

となるが、これは(1)式の形の解をもたない。しかし、 $\gamma(x)$  が特に極端に変化することがなければ、その解は  $\gamma$  が定数の場合と大体は同じような特徴をもつと期待することができる。特に、ある意味同じような解の構造をもつと期待することができる。これは、非一様な媒体の中の分散波の問題と考えることができる。さらに、方程式が変数分離型の解、例えば

$$\varphi(x, t) = X(\kappa x) e^{-i\omega t}, \quad \omega = W(\kappa)$$

なる形の解をもち、 $X$  が Bessel 関数のような振動する関数である場合が考えられる。これも同様に分散的であるかもしれないが、これを全体の定義に含めることは困難である。現時点では、“空間的な振動と時間的な振動が分散関係によって結びつけられているときにはいつでも分散波の特徴的な現象が現れることが期待できる” といった曖昧な概念としておくべきであると思われる。

状況は非線型系についても同様である。すなわち、ある限られたクラスについてのみ認定することができ、その概念は自然な形でその他の場合に拡張される。

より包括的な答えは後の章で展開する変分原理による定式化の中にあるかも知れない。これらによると一般的な方法で解の理論を構築することができる。そして恐らくはこのクラス分けの問題を含む多くの問題に対して適切かつ一般的な骨組みを与えるものである。

しかし、これはまだ未解決の問題である。