11.2 General Solution by Fourier Integrals

2010/04　鈴木幸人

　ある線型方程式が

$$\varphi(x,t) = Ae^{i\kappa\cdot x - i\omega t}$$

$$\omega = W(\kappa)$$

なる形の解をもつものとする。そのとき、少なくとも形式的には

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t} d\kappa \tag{15}$$

も解である[6]。任意関数 $F(\kappa)$ は初期条件もしくは境界条件を満たすように決められる（Fourier変換が可能であるような適当な値をとる場合において）。n個の異なる関数 $W(\kappa)$ をもつn個のモードがある場合には、n個の任意関数 $F(\kappa)$ に対する(15)式右辺の形のn個の項の和として表される。その場合には、解を決定するためには n個の初期条件を与えるのが適切となるであろう。(6)式〜(8)式の例はすべて二つのモードをもち、したがって時刻 $t=0$ において φ と φ_t を指定するのが適切である。これらの例のように、二つのモードは $\omega = \pm W(\kappa)$ と表されることがよく起こり、典型的な一次元問題においては

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa \tag{16}$$

と表され、初期条件

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

が与えられる。(16)式第１項の被積分関数の位相速度は $c = W(\kappa)/\kappa$ であり、第２項の被積分関数の位相速度は $c = -W(\kappa)/\kappa$ であるから、(7)式（？）のように $W(\kappa)$ が κ の奇関数の場合には第１項は右に進む波を表し、第２項は左に進む項を表す[7]。(6)式および(8)式のように $W(\kappa)$ が κ の偶関数の場合には、右に進む波と左に進む波が両方の項に現れる。(16)式が初期条件を満たすためには

---

[6] 単独の定数係数線型微分方程式 $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi = 0$ の場合には、分散関係式は多項式 $P(-i\omega, i\kappa_1, i\kappa_2, i\kappa_3) = 0$ であるから $W(\kappa)$ も多項式である。したがって $F \in \mathcal{S}$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha F(\kappa)e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t}\right| d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(-iW(\kappa)\right)^m (i\kappa)^\alpha F(\kappa) e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t}\right| d\kappa$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |W(\kappa)^m \kappa^\alpha F(\kappa)| d\kappa < \infty \quad (\forall m \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^3; \forall x, t \in \mathbb{R})$$

より

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) F(\kappa) e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t} d\kappa$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(-iW(\kappa), i\kappa_1, i\kappa_2, i\kappa_3) F(\kappa) e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t} d\kappa = 0$$

が成り立つ。ただし $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}_+$ は３次元の多重指標で

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

である。

[7] ここで $\kappa > 0 \Rightarrow W(\kappa) > 0$ を仮定している。すなわち $W(\kappa)$ が奇関数の場合には、$\omega = W(\kappa)$ のモードの位相速度は（κ の符号によらず）$c = W(\kappa)/\kappa > 0$ である。

$$\varphi_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\kappa)e^{i\kappa x}\,d\kappa+\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\kappa)\,e^{i\kappa x}\,d\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_1(\kappa)+F_2(\kappa)\}\,e^{i\kappa x}\,d\kappa$$

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}-iW(\kappa)F_1(\kappa)e^{i\kappa x}\,d\kappa+\int_{-\infty}^{\infty}iW(\kappa)F_2(\kappa)\,e^{i\kappa x}\,d\kappa$$

$$=-i\int_{-\infty}^{\infty}W(\kappa)\{F_1(\kappa)-F_2(\kappa)\}e^{i\kappa x}\,d\kappa$$

が成り立たなければならない [8]。Fourier逆変換公式より

$$F_1(\kappa)+F_2(\kappa)=\Phi_0(\kappa)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)e^{-i\kappa x}\,dx$$

$$-iW(\kappa)\{F_1(\kappa)-F_2(\kappa)\}=\Phi_1(\kappa)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)e^{-i\kappa x}\,dx$$

が得られる [9]。したがって、関数 F_1, F_2 を初期条件から

$$F_1(\kappa)=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0(\kappa)+\frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)}\right\}$$

$$F_2(\kappa)=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0(\kappa)-\frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)}\right\}$$

と定めることができる [10]。これらを(16)式に代入すると

---

[8] 定数係数線型微分方程式の場合には、$F_1, F_2\in\mathcal{S}$ とすると、脚注 6 に示したように(16)式において微分と積分の順序は可換であり、$\varphi(x,t)$ は x と t に関して無限回微分可能である。

[9] これも定数係数線型微分方程式の場合には $F_1, F_2\in\mathcal{S}$ より $F_1+F_2,\ -iW(F_1-F_2)\in\mathcal{S}$ である（W は多項式）から $\varphi_0=2\pi\cdot\mathcal{F}^{-1}[F_1+F_2],\quad \varphi_1=2\pi\cdot\mathcal{F}^{-1}[-iW(F_1-F_2)]$ より

$$F_1+F_2=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\varphi_0],\quad -iW(F_1-F_2)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\varphi_1]$$

が得られる。

[10] この議論が成り立つためには $F_1, F_2\in\mathcal{S}$ となるような Φ_0, Φ_1 でなければならない。そのためには、少なくとも $W(\kappa)=0\Rightarrow\Phi_1(\kappa)=0$ でなければならず、(7)式あるいは(8)式の例では $W(0)=0$ であるから、これは $\Phi_1(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)dx=0$ 、すなわち初期に与える運動量の総和が 0 でなければならないことを意味している。一方、(6)式の例では $W(\kappa)\neq 0$ であるからそのような制限はない。この条件：$W(\kappa)=0\Rightarrow\Phi_1(\kappa)=0$ によって与えられる初期値の制限は、(7)式と(8)式の Galilei 不変性に対応しているものと考えられる（(6)式は Galilei 不変性を満たさない）。

$$\begin{aligned}
\varphi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(\kappa) + \frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(\kappa) - \frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \left\{\Phi_0(\kappa) e^{-iW(\kappa)t} + i\Phi_1(\kappa) \frac{e^{-iW(\kappa)t} - e^{iW(\kappa)t}}{2W(\kappa)}\right\} d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \left\{\Phi_0(\kappa) e^{-iW(\kappa)t} + \Phi_1(\kappa) \frac{\sin[W(\kappa)t]}{W(\kappa)}\right\} d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\kappa) e^{i\kappa x} \frac{\sin[W(\kappa)t]}{W(\kappa)t} d\kappa\right\} t
\end{aligned}$$

が得られる [11]。

初期条件 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ は実数値関数であるから $\Phi_0(-\kappa) = \Phi_0^*(\kappa)$ および $\Phi_1(-\kappa) = \Phi_0^*(\kappa)$ が成り立つ（＊は複素共役を表す)。したがって、 $W(\kappa)$ が奇関数の場合には

$$\begin{aligned}
F_1(-\kappa) &= \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) + \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) + \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{-W(\kappa)}\right\} = F_1^*(\kappa) \\
F_2(-\kappa) &= \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) - \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) - \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{-W(\kappa)}\right\} = F_2^*(\kappa)
\end{aligned} \tag{17}$$

であり、$W(\kappa)$ が偶関数の場合には

$$\begin{aligned}
F_1(-\kappa) &= \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) + \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) + \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} = F_2^*(\kappa) \\
F_2(-\kappa) &= \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) - \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) - \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} = F_1^*(\kappa)
\end{aligned} \tag{18}$$

である。どちらの場合も(16)式は実数値関数になる [12]：実変数の方程式に実数値の初期値を

---

[11] したがって、形式的には $W(\kappa) = 0$ and $\Phi_1(\kappa) = 0$ の場合でも解を構成することが可能である。特に $\varphi_1(x) = \text{const.}$ のときには $\Phi_1(\kappa) = \text{const.} \cdot \delta(\kappa)$ であるから、$W(\kappa) = 0$ ならば第２項は $\text{const.} \cdot t$ となる。これは平行移動を表しており、$\varphi_1(x) = \text{const.}$ を与えたときの当然予測される解の挙動を表している。

[12] 実際、$W(\kappa)$ が奇関数の場合には

$$\begin{aligned}
\varphi(x,t) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa \\
&= \textstyle\int_0^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^{\infty} F_1(-\kappa) e^{-i\kappa x - iW(-\kappa)t} d\kappa \\
&\quad \textstyle + \int_0^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^{\infty} F_2(-\kappa)\, e^{-i\kappa x + iW(-\kappa)t} d\kappa \\
&= \textstyle\int_0^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^{\infty} F_1^*(\kappa) e^{-i\kappa x - (-i)W(\kappa)t} d\kappa \\
&\quad \textstyle + \int_0^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^{\infty} F_2^*(\kappa)\, e^{-i\kappa x + (-i)W(\kappa)t} d\kappa \\
&= \textstyle\int_0^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \left(\int_0^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa\right)^* \\
&\quad \textstyle + \int_0^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \left(\int_0^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa\right)^* \\
&= \textstyle\Re\left[\int_0^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa\right] + \Re\left[\int_0^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa\right]
\end{aligned}$$

であり、$W(\kappa)$ が偶関数の場合には

$$\varphi(x,t) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa$$

与えた場合、解は実数値にならなければならない[13]。

他の解をそれから再構成することができるような標準的な解は

$$\varphi_0(x) = \delta(x), \quad \varphi_1(x) = 0$$

とすることにより得ることができる[14]。そのとき

$$\Phi_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\kappa x}\, dx = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Phi_1(\kappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\kappa x}\, dx = 0$$

であるから $F_1(\kappa) = F_2(\kappa) = 1/4\pi$ である。したがって(16)式は

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty F_1(-\kappa) e^{-i\kappa x - iW(-\kappa)t} d\kappa \\
&\quad + \int_0^\infty F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty F_2(-\kappa)\, e^{-i\kappa x + iW(-\kappa)t} d\kappa \\
&= \int_0^\infty F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty F_2^*(\kappa) e^{-i\kappa x + (-i)W(\kappa)t} d\kappa \\
&\quad + \int_0^\infty F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty F_1^*(\kappa)\, e^{-i\kappa x - (-i)W(\kappa)t} d\kappa \\
&= \int_0^\infty F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \left(\int_0^\infty F_2(\kappa) e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa\right)^* \\
&\quad + \int_0^\infty F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \left(\int_0^\infty F_1(\kappa)\, e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa\right)^* \\
&= \Re\left[\int_0^\infty F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa\right] + \Re\left[\int_0^\infty F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa\right]
\end{aligned}$$

である。

[13] 任意の実変数実数値関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は奇関数 $f_{\mathrm{odd}}(x) = [f(x) - f(-x)]/2$ と偶関数 $f_{\mathrm{even}}(x) = [f(x) + f(-x)]/2$ の和として表される。

[14] $\varphi(x,0) = \delta(x), \varphi_t(x,0) = 0$ なる解に対して

$$\psi(x,t) = (\varphi(\cdot,t) * \psi_0)(x) \ \left(= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y,t)\psi_0(y)dy\right)$$

とおくと （$\psi_0 \in \mathcal{S}'$ とする）

$$\psi(x,0) = (\delta * \psi_0)(x)\left(= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\psi_0(y)dy\right) = \psi_0(x)$$

$$\psi_t(x,0) = (\varphi_t(\cdot,t) * \psi_0)(x)\left(= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x-y,0)\psi_0(y)dy\right) = 0$$

が成り立ち、例えば $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0$ ならば

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\{\varphi(\cdot,t) * \psi_0\} = \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,t)\right\} * \psi_0 = 0$$

$$\left(= P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y,t)\psi_0(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y,t)\psi_0(y)dy = 0\right)$$

が成り立つ。ここで $\psi_t(x,0) = (\varphi_t(\cdot,t) * \psi_0)(x)$ なる関係を用いたが、これは次のようにして示すことができる。すなわち

$$\begin{aligned}
\forall u \in \mathcal{S}, &\left(\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(\cdot,t) * \psi_0](x), u(x,t)\right) = -\lim_{j\to\infty}\left([\varphi(\cdot,t) * \psi_0](x), \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right) \\
&= -\lim_{j\to\infty}\left(\varphi(x,t)\cdot\psi_0(y), \eta_j(x,y)\frac{\partial}{\partial t}u(x+y,t)\right) \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)\cdot\psi_0(y), \eta_j(x,y)u(x+y,t)\right) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\cdot,t) * \psi_0\right](x), u(x,t)\right)
\end{aligned}$$

である（ただし $\eta_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \lim_{j\to\infty}\eta_j = 1 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$）。

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i\kappa x - iW(\kappa)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i\kappa x + iW(\kappa)} d\kappa \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^\infty e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty e^{-i\kappa x - iW(-\kappa)t} d\kappa \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^\infty e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa + \int_0^\infty e^{-i\kappa x + iW(-\kappa)t} d\kappa \right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \left\{2\Re\left(e^{i\kappa x - iW(\kappa)t}\right) + 2\Re\left(e^{i\kappa x + iW(\kappa)t}\right)\right\} d\kappa \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{\cos[\kappa x - W(\kappa)] + \cos[\kappa x + W(\kappa)]\} d\kappa \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\kappa x \cos W(\kappa)\, d\kappa
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる。勿論これは超関数として解釈されなければならない。

＊＊＊　補足：緩増加超関数による解釈　＊＊＊

Schwarz の急減少関数の空間を

$$
\mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall p, q \in \mathbb{Z}_+, \|u\|_{p,q} = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^p) \sum_{n=0}^{q} \left|u^{(n)}(x)\right| < \infty \right\}
$$

とし、緩増加超関数の空間を $\mathcal{S}$ 上の連続な線型汎関数全体の集合：

$$
\mathcal{S}' = \left\{ T{:}\mathcal{S} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall u, v \in \mathcal{S}, \forall a, b \in \mathbb{C}, T(au + bv) = aT(u) + bT(v), \\ \lim_{n\to\infty} u_n = u \ \text{in}\, \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tu_n = Tu \ \text{in}\, \mathbb{R} \end{array} \right\}
$$

と定義する。ただし

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = u \ \text{in}\, \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall p, q \in \mathbb{Z}_+, \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p,q} = 0
$$

である。緩増加超関数列の収束は

$$
\lim_{n\to\infty} T_n = T \ \text{in}\, \mathcal{S}' \Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{S}, \lim_{n\to\infty} T_n(u) = T(u)
$$

と定義される。また緩増加超関数の Fourier 変換 $\mathcal{F}{:}\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ を

$$
\forall u \in \mathcal{S}, (\mathcal{F}[T], u) = (T, \mathcal{F}[u])
$$

と定義すると、これは Fourier 変換 $\mathcal{F}{:}\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ とともに同相変換となる。

(15)式：

$$
\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa\cdot x - iW(\kappa)t} d\kappa
$$

において、 $F \in \mathcal{S}'$ とすると $F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t} \in \mathcal{S}'$ であるから、これは

$$
\varphi(\cdot, t) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right] \in \mathcal{S}'
$$

と表せる。$2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\kappa - \kappa_0)e^{-iW(\kappa)t}\right](x) = e^{i\kappa_0\cdot x - iW(\kappa_0)t}$ であるから [15]、これは波数空間上で

---

[15] 実際

$$
\forall u \in \mathcal{S}, \left(2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\kappa - \kappa_0)e^{-iW(\kappa)t}\right], u\right) = \left(2\pi\delta(\kappa - \kappa_0)e^{-iW(\kappa)t}, \mathcal{F}^{-1}u(\kappa)\right)
$$

$F(\kappa)$ で分布する波動 $e^{i\kappa\cdot x-iW(\kappa)t}$ が連続的に重ね合わさったものと解釈することができる。

上記 $\varphi(\cdot,t)\in\mathcal{S}'$ の微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\cdot,t)=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right]=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[-iW(\kappa)F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\cdot,t)=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[i\kappa_jF(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right]\quad(j=1,2,3)$$

であるから[16]、単独の定数係数線型微分方程式 $P(\partial/\partial t,\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3)\varphi=0$ の場合には分散関係式は多項式 $P(-i\omega,i\kappa_1,i\kappa_2,i\kappa_3)=0$ で

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi(x,t)=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[P(-i\omega,i\kappa_1,i\kappa_2,i\kappa_3)F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right]$$
$$=0$$

が成り立つ。

モードが $\omega=\pm W(\kappa)$ と表される場合、$F_1,F_2\in\mathcal{S}'$ として

$$\varphi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\kappa)e^{i\kappa x-iW(\kappa)t}d\kappa+\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\kappa)\,e^{i\kappa x+iW(\kappa)t}d\kappa$$
$$=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[F_1(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right]+2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[F_2(\kappa)e^{iW(\kappa)t}\right]$$

とおく。初期条件を

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x)\in\mathcal{S}',\quad \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x)\in\mathcal{S}'$$

とすると

$$2\pi\mathcal{F}^{-1}[F_1(\kappa)]+2\pi\mathcal{F}^{-1}[F_2(\kappa)]=\varphi_0,$$
$$2\pi\mathcal{F}^{-1}[-iW(\kappa)F_1(\kappa)]+2\pi\mathcal{F}^{-1}[iW(\kappa)F_2(\kappa)]=\varphi_1$$

より

$$F_1+F_2=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\varphi_0,$$

$$-iWF_1+iWF_2=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\varphi_1$$

したがって

$$=\left(2\pi\delta(\kappa-\kappa_0),e^{-iW(\kappa)t}\mathcal{F}^{-1}u(\kappa)\right)=2\pi e^{-iW(\kappa_0)t}\mathcal{F}^{-1}u(\kappa_0)$$
$$=2\pi e^{-iW(\kappa_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{i\kappa_0\cdot x}dx=\left(2\pi e^{i\kappa_0\cdot x-iW(\kappa_0)t},u(x)\right)$$

が成り立つ。

[16] 実際、Fourier 変換 $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ は同相変換であるからその逆変換とともに極限操作と可換であり、したがってパラメータに関する微分とも可換であるから、

$$\forall u\in\mathcal{S},\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\cdot,t),u\right)=-\left(\varphi(\cdot,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-\left(2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right],\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$=-\left(2\pi F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t},\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right)=-\left(2\pi F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t},\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}^{-1}u\right)$$
$$=\left(2\pi\frac{\partial}{\partial t}\left\{F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right\},\mathcal{F}^{-1}u\right)=\left(2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(\kappa)e^{-iW(\kappa)t}\right],u\right)$$

が成り立つ。

$$F_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\mathcal{F}\varphi_0 + \frac{i\mathcal{F}\varphi_1}{W}\right),$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\mathcal{F}\varphi_0 - \frac{i\mathcal{F}\varphi_1}{W}\right)$$

が得られる。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊