11.3 Asymptotic Behavior

2010/05　鈴木幸人

Fourier 積分は厳密解を与えるけれども、その内容を調べるのは難しい。x と t が大きいときの漸近挙動を考えることによって、分散波動の主要な特徴が明らかになり、また理解できるようになる。まず最初に一次元の場合の典型的な積分

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)} d\kappa$$

を考える。波動においては、x と t が大きいときの振る舞いに興味がある。興味があるのは x/t を固定して $t \to \infty$ とした場合の極限である。そこで、積分を

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\chi(\kappa)t} d\kappa \tag{20}$$

ただし

$$\chi(\kappa) = W(\kappa) - \kappa \frac{x}{t}$$

と書いておく。さしあたり x/t は固定パラメータとし、κ に対する依存性のみ χ に表しておいた。そのとき、(20)式の積分は stationary phase 法によって調べることができる。実際、これが Kelvin がその手法を開発したときに考えた問題である。Kelvin は t が大ききときにはこの積分に主に寄与するのは

$$\chi'(k) = W'(k) - \frac{x}{t} = 0 \tag{21}$$

なる停留点 $\kappa = k$ の近傍であるとした。それ以外の部分では $e^{-i\chi t}$ が急激に振動し正味では小さな寄与しかしないことになる。後に開発された steepest descent 法（鞍部点法）は正当化したり誤差を評価するのがより容易である。この方法の完全な議論は例えば Jeffreys and Jeffreys(1956, Sections 17.04-17.05)に与えられている。ここでは、Kelvin の議論に従い、漸近展開の初項を導くことで十分であろう。

(20)式の関数 $F(\kappa), \chi(\kappa)$ を $\kappa = k$ のまわりで Taylor 展開する。主要な寄与は次の項に由来する（$\chi''(k) \neq 0$ である限りにおいて）

$$F(\kappa) \simeq F(k)$$

$$\chi(\kappa) \simeq \chi(k) + \frac{1}{2}(\kappa - k)^2 \chi''(k)$$

この近似によると、(20)式の積分は

$$\varphi(x,t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp\left\{-i\left[\chi(k) + \frac{1}{2}(\kappa-k)^2\chi''(k)\right]t\right\} d\kappa$$

$$= F(k)\exp\{-i\chi(k)t\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2}(\kappa-k)^2\chi''(k)t\right\} d\kappa$$

と表される。残りの積分は、積分路を $\pm\pi/4$ だけ回転させることによって実数の誤差積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}$$

に帰着させることができる。ただし積分路の回転の符号は $\chi''(k)$ の符号と同じにとる（これは積分路を最急下降方向にとることに対応している)。したがって、結局(20)式の積分は

$$\varphi(x,t) \simeq F(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}}\exp\left\{-i\chi(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k)\right\}$$

と近似することができる。

(21)式を満たす停留点 $\kappa = k$ が一つ以上存在する場合には、それぞれの寄与は同じように評価することができて、積分はそれらの和として

$$\varphi(x,t) \simeq \sum_k F(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\} \tag{22}$$

と近似される。

漸近挙動の次の項を評価するには、Taylor 級数展開において $F(\kappa)$ に関しては $(\kappa - k)^2$ の項まで、$\chi(\kappa)$ に関しては $(\kappa - k)^4$ の項までが必要である。さらに二つの項が必要になる理由は、奇数次の項が積分時に最終的には打消し合うためである。steepest descent 法を用いて高次項を評価すると、(22)式に掛る係数として

$$1 - \frac{i}{t|W''|}\left(\frac{F''}{2F} - \frac{1}{2}\frac{W'''}{W''}\frac{F'}{F} + \frac{5}{24}\frac{W'''^2}{W''^2} - \frac{1}{8}\frac{W^{iv}}{W''}\right) \tag{23}$$

が得られる。この複雑な形は F と χ の Taylor 級数展開においてさらに二つの項を考慮したことからきている。一般的には、この級数展開は k の関数を係数とする t の負の冪級数として続けていくことができる。

先程は“大きい t ”という意味を曖昧なまま残しておいた。それは(23)式の修正項が小さいという意味にとることができる。すなわち、t は分散関係式と初期条件における長さスケールから導かれる時間スケールに比べて十分大きくなければならない。短い長さスケールをもつ鋭いピークをもつ初期値の場合には F' と F'' は小さく [17]、したがって要求される条件は、$W(k)$ における典型的な周期（これは方程式の中のパラメータによって与えられる）に比べて t が十分大きいことである。初期値が δ 関数で与えられる極端な場合には、F は定数であり、したがって $F' = F'' = 0$ である [18]。

---

[17] 一般に Fourier 変換において

$$\mathcal{F}[\delta^{-1}f(x/\delta)] = \mathcal{F}f(\delta\xi), \quad \mathcal{F}[f(\delta x)] = \delta^{-1}\mathcal{F}f(\xi/\delta)$$

が成り立つ。

[18] 例えば W とその微分を支配する長さスケールを L、時間スケールを T 、また F の微分を支配する長さスケールを L_0 とすると、(23)式のスケールは $F'' \neq 0, F' \neq 0$ のとき

$$1 - \frac{i}{t(L^2/T)}\left(\frac{L_0^2F}{2F} - \frac{1}{2}\frac{L^3/T}{L^2/T}\frac{L_0F}{F} + \frac{5}{24}\frac{L^6/T^2}{L^4/T^2} - \frac{1}{8}\frac{L^4/T}{L^2/T}\right) \sim 1 - \frac{T}{t}\left[\left(\frac{L_0}{L}\right)^2 - \frac{LL_0}{L^2} + 1\right]$$

であるから、L_0 が十分小さい（$L_0 \ll L$）とき高次項が小さくなる条件は $t \gg T$ である。

二つのモードが $\omega = \pm W(\kappa)$ と表される特殊な場合には、完全な解が(16)式：

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa)\, e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa$$

で与えられる。さらに $\kappa > 0$ において $W'(\kappa)$ は単調で $W'(\kappa) > 0$ であるとし（通常の場合はこれにあてはまる）、$x > 0$ に対して(16)式の漸近挙動を考える。$W(\kappa)$ が奇関数ならば $W'(\kappa)$ は偶関数であり[19]、(21)式は $\pm k$ の二つの根をもつ。この二つの根の(16)式第 1 項の積分への寄与は、(17)式

$$F_1(-\kappa) = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) + \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) + \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{-W(\kappa)}\right\} = F_1^*(\kappa)$$

$$F_2(-\kappa) = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) - \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) - \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{-W(\kappa)}\right\} = F_2^*(\kappa)$$

より $F_1(-\kappa) = F_1^*(\kappa)$ であるから、(22)式において次のように足し合せることができる。

$$\varphi(x,t) \simeq F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$+ F_1(-k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(-k)|}}\exp\left\{-ikx - iW(-k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(-k)\right\}$$

$$= F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$+ F_1^*(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|-W''(k)|}}\exp\left\{-ikx + iW(k)t + \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$= 2\Re\left[F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}\right]$$

すなわち

$$\varphi(x,t) \simeq 2\Re\left[F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}\right] \tag{24}$$

である。ここで $k(x,t)$ は(21)式の正の根で

$$k(x,t):\ W'(k) = \frac{x}{t},\quad k > 0,\quad \frac{x}{t} > 0 \tag{25}$$

---

[19] 実際 $W(-\kappa) = -W(\kappa) \Rightarrow -W'(-\kappa) = -W'(\kappa)$ である。

により定義される。なお、奇関数の場合(16)式の第２項は $x>0$ における解に寄与しない[20]。それは $x<0$ における解に対応する。

一方 $W(\kappa)$ が偶関数の場合には $W'(\kappa)$ は奇関数で、(21)式： $\chi'(k)=W'(k)-x/t=0$ は $x>0$ において一つの根 $\kappa=k$ をもち（仮定：$\kappa>0\Rightarrow W'(\kappa)>0$ より $k>0$ である）、そのとき $W'(k)=x/t>0$ である。したがって、$x>0$ において(16)式の第１項からは一つの寄与しか無いが、もう一つの寄与は第２項から得られる。すなわち、その場合の(21)式は

$$W'(\kappa)=-\frac{x}{t}$$

となるが、一方 $W'(\kappa)$ は奇関数であるから、上で仮定した $\kappa>0\Rightarrow W'(\kappa)>0$ は $\kappa<0\Rightarrow W'(\kappa)<0$ を意味する。したがって、これは $x>0$ において一つの根 $\kappa=-k$ をもつ。すなわち、この場合にも(22)式は二つの項の和から成り、(18)式：

$$F_1(-\kappa)=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa)+\frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa)+\frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\}=F_2^*(\kappa)$$

$$F_2(-\kappa)=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa)-\frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa)-\frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\}=F_1^*(\kappa)$$

より

$$\varphi(x,t)\simeq F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx-iW(k)t-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$+F_2(-k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(-k)|}}\exp\left\{-ikx+iW(-k)t+\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(-k)\right\}$$

$$=F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx-iW(k)t-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$+F_1^*(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-ikx+iW(k)t+\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$=2\Re\left[F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx-iW(k)t-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}\right]$$

---

[20] 第２項のときには(21)式は $\chi'(k)=W'(k)+x/t=0$ すなわち $W'(k)=-x/t$ となるが、仮定より $\kappa>0\Rightarrow W'(\kappa)>0$ であり、また $W(\kappa)$ が奇関数の場合には $W'(\kappa)$ は偶関数であって $\kappa<0$ のときも $W'(\kappa)>0$ であるから、$x>0$ において(21)式の解は存在しない。解が存在するのは $x<0$ のときで、第１項と同様に $\pm k$ の二つの根をもつ。

と表される[21]。この場合にも $k(x,t)$ は(21)式の正の根で(25)式により定義されるものである。

ここまでで分散波の定義における条件 $W''(\kappa) \neq 0$ の重要性は明らかである。もし $W'(\kappa)$ が定数ならば、一般の x/t において停留値は存在せず、全体の漸近解析は違ったものになる。勿論、その場合には Fourier 積分は直ちに簡略化されるので、上記のような漸近解析を行う必要はない。$W''(\kappa) \neq 0$ の重要性は、(24)式と誤差項(23)式の分母にそれがあることにも現れている。もし $W''(\kappa)$ が恒等的には 0 でなく、幾つかの特別な停留点 k において 0 になるときには、χ の Taylor 級数展開の更なる項を加えることによって正しい漸近挙動を得ることができる。もし $\chi''(k) = 0$ であるが $\chi'''(k) \neq 0$ であるとすれば、その停留点の寄与は stationary phase method を用いて以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
&F(k)\exp\{-i\chi(k)t\}\int_{\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{i}{6}t\chi'''(k)(\kappa-k)^3\right\}d\kappa \\
&\quad=\left(\frac{1}{3}\right)!\,3^{5/6}2^{1/3}\frac{F(k)}{(t|W'''(k)|)^{1/3}}\exp\{ikx-iW(k)t\}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

---

[21] (16)式第２項の積分では $\chi(\kappa) = -W(\kappa) - \kappa x/t$ であるから $\chi''(\kappa) = -W''(\kappa)$ したがって $\mathrm{sgn}\chi''(k) = -\mathrm{sgn}W''(k)$ より

$$\varphi(x,t) \simeq \sum_k F(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx + iW(k)t + \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

となる。