11.4 Group Velocity; Wave Number and Amplitude Propergation

2010/06　鈴木幸人

任意の点 (x, t) において(25)式：

$$k(x,t):\ W'(k) = \frac{x}{t},\quad k > 0,\quad \frac{x}{t} > 0 \tag{25}$$

はある波数 $k(x,t)$ を決定し、また分散関係 $\omega = W(\kappa)$ によってその点の振動数 $\omega(x,t)$ が与えられる。そこで位相

$$\theta(x,t) = k(x,t)x - \omega(x,t)t$$

を導入する[22]。すると(24)式：

$$\varphi(x,t) \simeq 2\Re\left[F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}\right] \tag{24}$$

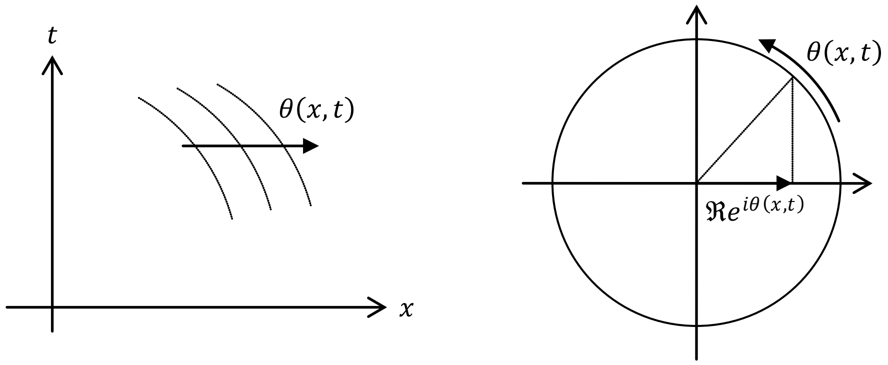
は

$$\varphi = \Re\left\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\right\} \tag{27}$$

と表すことができる。ただし A は複素振幅で

$$A(x,t) = 2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\} \tag{28}$$

である。(27)式の表現は要素解の形であるが、A, k, ω はもはや定数ではない。しかしながら、この解は依然として局所的な最大値と最小値の間の変動を記述する位相 θ をもつ振動する波列を表している（図A）。要素解との違いは、この波列は一様ではないということである。すなわち、連続する最大値の間の距離および時間間隔は一定ではない。振幅に関しても同様である。



図A　位相 θ による振動

---

[22] 各々の (x,t) に対して $W'(k) = x/t$ を満たす $k = k(x,t)$ が複数存在する可能性があるが、その場合複数の関数 $k_i(x,t)\ (i = 1,2,\ldots)$ を考える。すると各々の $k_i(x,t)$ に対してそれぞれ(27)式の形の基本解が対応し、一般解はそれらの重ね合わせにより表される。分散関係に複数のモードが存在し、一つの k に対し複数の ω が対応する場合にも同様に処理することができる。

この非一様の場合には、波数と振動数の概念を一般化して、それぞれ θ_x と $-\theta_t$ によって定義するのが自然である。単位長さの中に含まれる最大値の数を数えることは、この場合には明らかにうまくない方法であり、その数は明確に定まらない量である。これに対して θ_x は直接的であり、局所的な波数という直観的な概念にうまく対応している。さらに、この分散波動の場合には

$$
\begin{aligned}
&\theta(x,t) = k(x,t)x - W\big(k(x,t)\big)t,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial x} = k + \frac{\partial k}{\partial x}x - W'(k)\frac{\partial k}{\partial x}t = k + \{x - W'(k)t\}\frac{\partial k}{\partial x},\\
&\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t}x - W'(k)\frac{\partial k}{\partial t}t - W(k) = -W(k) + \{x - W'(k)t\}\frac{\partial k}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

であり、停留条件：(25)式

$$
k(x,t):\ W'(k) = \frac{x}{t},\quad k > 0,\quad \frac{x}{t} > 0 \tag{25}
$$

より

$$
\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) = k(x,t) \tag{30}
$$

および

$$
\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = -W\big(k(x,t)\big) = -\omega(x,t) \tag{31}
$$

が得られる。すなわち、Fourier 積分における波数の（停留条件を満たすものとして選ばれた）ある特殊な値である k が、振動する非一様な波列において波数概念の拡張として定義した局所的な波数 θ_x と一致することが示された。振動数についても同様である。*さらに、非一様な波列においても、局所的な波数と局所的な振動数は分散関係*

$$
\omega(x,t) = W\big(k(x,t)\big)
$$

を満たすことがわかる。

これらの非一様な場合への拡張は、実は非一様性がそれほど大きくないと暗に仮定していることによって、このように簡潔に行うことが出来た。振動が非常に不規則な場合でも、位相関数 θ を見つけることができ、波数を θ_x によって定義することができるであろうが、もし一つの振動の間に θ_x 自身が大きく変化するならばその直観的な解釈は意味を失うであろう。我々の場合は、$k(x,t)$ はゆっくり変化する関数である。実際(25)式：$W'(k) = x/t$ の両辺を微分することより

$$
\frac{\partial}{\partial x}W'(k) = W''(k)k_x,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} = \frac{W'(k)}{x} \qquad \therefore \frac{k_x}{k} = \frac{W'(k)}{kW''(k)}\frac{1}{x}
$$

および

$$\frac{\partial}{\partial t}W'(k)=W''(k)k_t,\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{t}\right)=-\frac{x}{t^2}=-\frac{W'(k)}{t}\qquad \therefore \frac{k_t}{k}=-\frac{W'(k)}{kW''(k)}\frac{1}{t}$$

が得られるから [23]、$x/t=\mathrm{const.}, x,t\to\infty$ のとき $k_x/k, k_t/k\to 0$ である。したがって、一つの波長あるいは周期の中で相対的な波数の変化は小さい。この意味で k はゆっくり変化する関数である。ω についても同様のことが言える[24](ただし、この場合にも $W''(k)=0$ の近傍では特異な挙動となることに注意する)。(28)式より、A もまたゆっくり変化する関数である [25]。

(27)式：$\varphi=\Re\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\}$ に現れる諸量を以上のように解釈することとして、(25)式と(28)式によってそれぞれ k,ω と A が (x,t) の関数としてどのように決まるかについて再考する。(25)式は (x,t) の関数として k を決定しているが、その内容を正しく理解するためには見方を逆転し、ある特定の k_0 がどの場所で見つかるかを問うてみるのが良い。その答えは

$$x=W'(k_0)t$$

なる点である。すなわち速度 $W'(k_0)$ で移動する観測者は、常に波数 k_0 と振動数 $W(k_0)$ の波を見ることになる。この速度

$$W'(k)=\frac{d\omega}{d\kappa}(k)$$

を群速度という。これは波数に分布をもつ波の“グループ”に対して重要な速度である。すなわち、どのような特定の波数 k_0 も時間 t が経つと距離 $W'(k_0)$ だけ移動する。

特定の位相 θ_0 は

$$\theta(x(t),t)=\theta_0$$

に従って伝播する。それ故、それは

$$\theta_x\frac{dx}{dt}+\theta_t=0$$

すなわち

---

[23] ここでは、ある固定された k に対して、k_x と k_t がそれぞれ x と t に対してどのように変化するかを見ている。実際 k_x/k と k_t/k はそれぞれ k が変化する長さスケールと時間スケールの逆数を表している。

[24] $\omega_x=\partial W(k)/\partial x=W'(k)k_x$ および $\omega_t=\partial W(k)/\partial t=W'(k)k_t$ より

$$\frac{\omega_x}{\omega}=\frac{[W'(k)]^2}{\omega W''(k)}\frac{1}{x},\qquad \frac{\omega_t}{\omega}=-\frac{[W'(k)]^2}{\omega W''(k)}\frac{1}{t}$$

が成り立つ。

[25] 実際 $W''(k)\neq 0$ ならば $\mathrm{sgn}\,W''(k)=\pm 1\!:\mathrm{const.}$ であるから

$$A_x=2F_1'(k)k_x\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}e^{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)}-F_1(k)\left(\frac{2\pi}{t|W''(k)|}\right)^{-1/2}\frac{2\pi}{t}\frac{W'''(k)k_x}{|W''(k)|^2}e^{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)}$$

したがって

$$\frac{A_x}{A}=\frac{F_1'(k)k_x}{F_1(k)}-\left(\frac{2\pi}{t|W''(k)|}\right)^{-1}\frac{2\pi}{t}\frac{W'''(k)k_x}{|W''(k)|^2}=\left[\frac{F_1'(k)}{F_1(k)}-\frac{W'''(k)}{|W''(k)|}\right]k_x$$

が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega}{k}$$

によって伝播することになる。したがって、ω と k の意味は拡張されたが、位相速度 c は変わらず ω/k によって与えられる。しかし、これは群速度とは異なる。波の頂上を追いかけている観測者は局所的な位相速度で移動するが、そのとき観測される波数と振動数は変化する。すなわち、隣にあった波の頂上は離れていく。群速度で移動する観測者は同じ波数と振動数を観測するが、波の頂上は常に通り過ぎて行く。

この重要な違いを説明するために、梁（beam）の方程式を考える。分散関係は

$$W(\kappa) = \gamma\kappa^2$$

であるから、(25)式は

$$W'(k)(= 2\gamma k) = x/t$$

したがって

$$k = \frac{x}{2\gamma t},\quad \omega = \gamma k^2 = \frac{x^2}{4\gamma t^2},\quad \theta = kx - \omega t = \frac{x^2}{2\gamma t} - \frac{x^2}{4\gamma t} = \frac{x^2}{4\gamma t}$$

が得られる。k と ω が一定の群速度（$d\omega/d\kappa = 2\gamma\kappa$）による軌跡は

$$\frac{x}{2\gamma t} = k_0\text{:const.}\quad \therefore x = (2\gamma k_0)t$$

であり、位相が一定の位相速度（$\omega/\kappa = \gamma\kappa$）による軌跡は

$$\frac{x^2}{4\gamma t} = \theta_0\text{:const.}\quad \therefore x^2 = (4\gamma\theta_0)t$$

となる。なお、ある特定の (x,t) において位相速度は

$$\frac{\omega}{k} = \frac{x^2}{4\gamma t^2}\frac{2\gamma t}{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{t} = \frac{1}{2}W'(k) = \gamma k\quad \left(\text{or}\ \frac{\omega}{k} = \frac{\gamma k^2}{k} = \gamma k\right)$$

である[26]から、この場合には群速度は常に位相速度よりも大きい。

深水波の場合には分散関係は

$$W(\kappa) = \sqrt{g\kappa},\quad \kappa > 0$$

である。したがって

$$W'(k)\left(= \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = \frac{x}{t}\quad \therefore \frac{g}{k} = \frac{4x^2}{t^2},\quad x > 0$$

より

$$k = \frac{gt^2}{4x^2},\quad \omega = \sqrt{gk} = \frac{gt}{2x},\quad \theta = kx - \omega t = \frac{gt^2}{4x} - \frac{gt^2}{2x} = -\frac{gt^2}{4x}$$

---

[26] 位相が一定の軌跡の上の速度は $2x\dot{x} = 4\gamma\theta_0$ より $\dot{x} = 2\gamma\theta_0/x$ であるが、その点を通る群速度による軌跡の値を用いると

$$\theta_0 = \frac{x^2}{4\gamma t} = \frac{x}{4\gamma}\cdot 2\gamma k_0 = k_0 x/2$$

であるから $\dot{x} = \gamma k_0$ である。

が得られる。群速度は

$$W'(k)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

であり、位相速度は

$$\frac{\omega}{k}=\frac{gt}{2x}\cdot\frac{4x^2}{gt^2}=\frac{2x}{t}=2W'(k)=\sqrt{g/k}\quad\left(\text{or}\ \frac{\omega}{k}=\frac{\sqrt{gk}}{k}=\sqrt{g/k}\right)$$

であるから、この場合には群速度は常に位相速度よりも小さい。

（これまで考えてきた一様媒体の場合には）これら全てのケースで群速度による軌跡は直線であるが位相速度による軌跡はそうではない。すなわち、それぞれの波数は一定速度で伝播し、それぞれの位相は波数が変化するにつれて加速あるいは減速する。

初期値として $\varphi_0(x)=\delta(x),\varphi_1(x)=0$ をとると（前に示したように）

$$F_1=\frac{1}{4\pi}\left\{\mathcal{F}[\varphi_0]+\frac{i\mathcal{F}[\varphi_1]}{W(\kappa)}\right\}=\frac{1}{4\pi}$$

であるから、この場合には振幅 $A(x,t)$ も具体的に計算することができて、梁の場合には

$$A(x,t)=2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{t\cdot 2\gamma}}e^{-i\pi/4}=\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\gamma t}}$$

となる。したがって漸近解の完全形

$$\varphi=\Re\left\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\right\}=\Re\left\{\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\gamma t}}e^{i\frac{x^2}{4\gamma t}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}}\cos\left(\frac{x^2}{4\gamma t}-\frac{\pi}{4}\right)\tag{32}$$

が得られる。深水波の場合には

$$A(x,t)=2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{t\cdot\left|-\frac{1}{4g}\left(\frac{k}{g}\right)^{-\frac{3}{2}}\right|}}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi t\left[\frac{1}{4g}\left(\frac{t^2}{4x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]}}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{4g\left(\frac{t}{2x}\right)^3}{2\pi t}}e^{i\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{t}{x^{3/2}}e^{i\pi/4}$$

より[27]

$$\varphi = \Re\left\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\right\} = \Re\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{t}{x^{3/2}}e^{i\pi/4}e^{-igt^2/4x}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{t}{x^{3/2}}\cos\left(-\frac{gt^2}{4x}+\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{t}{x^{3/2}}\cos\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{i\pi}{4}\right) \quad (33)$$

となる。

群速度の二つ目の重要な役割は、$A(x,t)$ の分布を調べる中で現れる。(28)式：

$$A(x,t) = 2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\} \quad (28)$$

の形は、$|A|^2$ が調べるに値する量であることを示唆しており、またこれはエネルギー的な量であるので物理的に自然な量である。$|A|^2$ と真のエネルギー密度および“波の作用”との関係については後に追究する。いまのところ $A(x,t)$ は(28)式によって具体的に定義されている量であり、それについて $|A|^2$ を考えることができる。

任意の二点 $0 < x_1 < x_2$ の間の $|A|^2$ の積分は

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} A(x,t)A^*(x,t)dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 4F_1\big(k(x,t)\big)F_1^*\big(k(x,t)\big)\frac{2\pi}{t\left|W''\big(k(x,t)\big)\right|}dx$$
$$= 8\pi\int_{x_1}^{x_2}\frac{F_1\big(k(x,t)\big)F_1^*\big(k(x,t)\big)}{t\left|W''\big(k(x,t)\big)\right|}dx$$

によって得られる。この積分において、k は(25)式：

$$k(x,t):\ W'(k) = \frac{x}{t},\quad k > 0,\quad \frac{x}{t} > 0$$

によって与えられるものである。k は被積分関数の独立変数として現れるが x は k を通して間接的に現れるのみなので、変数変換

$$x = W'(k)t$$

を用いて k を新たな積分変数とする[28]ことは自然である。すなわち

$$Q(t) = 8\pi\int_{k_-(t)}^{k_+(t)}\frac{F_1(k)F_1^*(k)}{t|W''(k)|}|W''(k)t|dk$$
$$= 8\pi\int_{k_-(t)}^{k_+(t)}F_1(k)F_1^*(k)dk \quad (34)$$

ただし

---

[27] $W''(k) = \frac{d}{dk}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k}{g}\right)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{4g}\left(\frac{k}{g}\right)^{-3/2}$ である。

[28] $W''(k) \neq 0$ ならば陰関数定理により（ k の近傍で）$k = k(x,t)$ なる関数が存在する。

$$x_1 = W'(k_1)t,\ \ x_2 = W'(k_2)t,$$
$$k_+(t) = \max\{k_1(t), k_2(t)\},\ \ k_-(t) = \min\{k_1(t), k_2(t)\} \tag{35}$$

が得られる [29]。

もし k_1 と k_2 が時間とともに変化しないならば $Q(t)$ は一定である。(35)式によると、そのような x_1 と x_2 はそれぞれの群速度で移動する。したがって、任意の二つの群速度による軌跡の間に存在する $|A|^2$ の総量は時間とともに変化しない。この意味において、$|A|^2$ は群速度で伝播すると言える。群速度による軌跡は t に比例して広がっていく。それ故 $|A|$ は $t^{-1/2}$ で減衰することになる。

例えば初期撹乱が局在しある特定の波数 k^* の近くにおいてのみ有意な振幅をもつ場合には、結果として生じる撹乱は特定の群速度 $W'(k^*)$ による軌跡の近傍に制限され、波束全体として特定の群速度 $W'(k^*)$ で移動する。文献における群速度の記述は、この場合に限っていることが多い。しかし以上に示した議論はより一般的であり、図 11.1 と図 11.2 に示した通り、全ての波数にわたる一般的な波数分布と完全な分散（そこでは $W'(k)$ の全ての値が影響するようになる）を扱うことができるものである。

[29] ここで $\forall k \in [k_-, k_+], W''(k) \neq 0$ を仮定する。すなわち $W''(k)$ の符号は積分区間内で一定である。