

## 11.5 Kinematic Derivation of Group Velocity

2010/07 鈴木幸人

群速度の概念は波の運動を理解する上で非常に基本的であるので、それは Fourier 解析と stationary phase の産物にすぎないと結論すべきではないという感じを受ける。Fourier 解析が前節までに示したようには適用できない非均一媒体あるいは非線型問題の場合でも、確かに同じ概念が現れるはずであり、また同じように重要なはずである。どのようにしたら、その概念を Fourier 解析から解き放つことができるだろうか？

前節までに得られた結果をどのように一般化できるかをみるために、その導出過程をもっと直観的な議論によって見てみることにする。その議論はいつでも前節までに示してきた論旨によって検査することができるか、もしくは直接的な漸近解析によって最終的に正当化することができる。その優位性は莫大である。なぜなら、厳密解が知られていない問題に対しても近似的な扱いを進めることができるからである。同時に、厳密解が求められる場合でも、より迅速なまたより完全な洞察を得ることができる。

まず、群速度の波数と振動数の伝播を決定するという役割について考える。議論を再検討すると、とてもわずかなことしか要求されていないことが分かる。まず第一に、ゆっくり変化する波列があり、位相関数  $\theta(x, t)$  が存在するならば

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t \quad (36)$$

によって局所的な波数と振動数を定義することができる。さらに、分散関係

$$\omega = W(k) \quad (37)$$

が既知であるならば、もしくはそれを指定することができるならば、 $\theta$  に対する方程式を得ることができ<sup>30</sup>、それを解くことによって波の幾何形状を決定することができる。しかしながら、通常は(36)式から  $\theta$  を消去して

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

とし、これと(37)式からまず  $k(x, t)$  と  $\omega(x, t)$  を求める方が便利である。この定式化は2章で議論した非線型波の基礎方程式であることに注意する。実際  $k$  は波の密度、 $\omega$  は波の流束で(38)式は波の保存則である。分散関係：(37)式を(38)式に代入すると

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} W(k) = \frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad C(k) = W'(k) \quad (39)$$

が得られる。群速度  $C(k)$  は波数  $k$  の伝播速度である。

第2章に示した解析によると、(39)式の初期条件  $k(x, 0) = f(x)$  に対する一般解は

$$k(x(\xi, t), t) = f(\xi), \quad x(\xi, t) = \xi + \mathcal{L}(\xi)t \quad (40)$$

ただし

$$\mathcal{L}(\xi) = C(f(\xi))$$

<sup>30</sup> 具体的には  $-\theta_t = W(\theta_x)$  である。

である<sup>31</sup>。波数  $k$  の値をもつ領域が初期に原点に集中する特殊な場合には、単純な同心円状の波が現れる。そのとき  $k(x, t)$  は

$$x = C(k)t$$

より決定される。これは(25)式

$$k(x, t): W'(k) = \frac{x}{t}, \quad k > 0, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad (25)$$

によって与えられ図 11.1 と図 11.2 に表された  $k$  の決定機構と同じである。(24)式の漸近展開

$$\varphi(x, t) \simeq 2\Re \left[ F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} \exp \left\{ ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} W''(k) \right\} \right] \quad (24)$$

が有効であるためには、(23)式

$$1 - \frac{i}{t|W''|} \left( \frac{F''}{2F} - \frac{1}{2} \frac{W'''}{W''} \frac{F'}{F} + \frac{5}{24} \frac{W''''^2}{W''^2} - \frac{1}{8} \frac{W^{iv}}{W''} \right) \quad (23)$$

にも表れているように、 $x$  と  $t$  が非常に大きく、初期攪乱が原点に集中していると見做せることが必要であった。

しかし、この場合、概念は既に(25)式で与えられるものよりも拡張されている。 $\theta(x, t)$  によって定義されるゆっくり変化する波列は、原点における比較的集中した攪乱によって生じたものである必要は無く、また(40)式に示されるように  $k(x, t)$  の分布はより一般的なものである。さらに、解  $\varphi$  は  $\theta$  について正弦波状である必要もない。明確に定義された位相関数  $\theta$  をもつ振動的な波列で  $k$  と  $\omega$  の間の分散関係が与えられているものであればよい。

元の問題は線型で一般には双曲型ではないにもかかわらず、(39)式が非線型の大曲型であることは興味あることでありまた重要なことである。これは、 $k$  のような重要な全体的な量の伝播を記述するものとして双曲型方程式が現れる最初の例である。この意味で波の伝播を双曲型方程式と結びつけることができる。ただし、そこには注目に値する非双曲型の下部構造がある。

<sup>31</sup> 実際、(40)式より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} k(x(\xi, t), t) = \frac{\partial k}{\partial x} (x(\xi, t), t) \frac{\partial x}{\partial t} (\xi, t) + \frac{\partial k}{\partial t} (x(\xi, t), t) \\ &= \frac{\partial k}{\partial x} (x(\xi, t), t) C(f(\xi)) + \frac{\partial k}{\partial t} (x(\xi, t), t) \\ &= \frac{\partial k}{\partial x} (x(\xi, t), t) C(k(x(\xi, t), t)) + \frac{\partial k}{\partial t} (x(\xi, t), t) \end{aligned}$$

および

$$f(\xi) = k(x(\xi, 0), 0) = k(\xi, 0)$$

が成り立つ。

## Extensions

以上に示した群速度の単純化した導出は、多次元の場合および非均質媒体の場合に直ちに拡張することができる。非線型問題への拡張については、その場合分散関係式が振幅を含むので、更なる進展を待たなければならない。定数係数の多次元方程式についても、多重 Fourier 積分によって厳密解を得ることができ、その漸近展開を stationary phase によって行うことができる。 $n$  次元の場合

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{\kappa}) \exp\{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - iW(\boldsymbol{\kappa})t\} d\boldsymbol{\kappa} \\ &\sim F(\mathbf{k}) \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} \left(\det \left| \frac{\partial W}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j}(\mathbf{k}) \right| \right)^{-1/2} \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - iW(\mathbf{k})t + i\zeta\}\end{aligned}\quad (41)$$

ただし

$$\frac{x_i}{t} = \frac{\partial W}{\partial k_i}(\mathbf{k})$$

となることを容易に示すことができる ( $\zeta = (\pi/4)\text{sig}[\partial W/\partial \kappa_i \partial \kappa_j(\mathbf{k})]$  である)。しかし、以下ではより簡単な運動学的な導出を用いることとし、同時に非均質媒体の場合を含むものとする。

例えば3次元の場合、ゆっくり変化する波は位相  $\theta(\mathbf{x}, t)$  ただし  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  によって記述される。また、振動数  $\omega$  と波数  $\mathbf{k}$  を

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad k_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\quad (42)$$

によって定義する。分散関係は既知であるとし、

$$\omega = W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$$

と表せるものとする。この分散関係は、均質媒体の場合には(1)式の形の要素解を考えることによって得ることができる。僅かに非均質な媒体の場合には、まず媒体を記述するパラメータが定数のときの分散関係を見出し、その後  $\mathbf{x}, t$  の依存性を考慮するのが道理にかなっているように思われる。例えば、(6)式~(9)式の問題において  $\alpha, \beta, \gamma$  が  $\mathbf{x}, t$  のゆっくり変化する関数であるときには、そこに記されているのと同じ分散関係を用いるが、 $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\mathbf{x}, t$  のそのある決まった関数であるとする。直観的には、典型的な波長と周期において  $\alpha, \beta, \gamma$  が少ししか変化しない場合には、これは十分良い方法であるように思える。このことは、11.7 節と 11.8 節において実証することになる。

(42)式から  $\theta$  を消去すると

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} = 0\quad (43)$$

が得られる。この第1式に分散関係  $\omega(\mathbf{x}, t) = W(\mathbf{k}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)$  を代入すると

$$0 = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} W(\mathbf{k}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial W}{\partial k_j} \right)_{\mathbf{x}, t} \frac{\partial k_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{k}, t}$$

であるから、第2式： $\partial k_i / \partial x_j = \partial k_j / \partial x_i$  を用いると

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial k_i}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{k}, t} \quad (44)$$

ただし

$$C_j(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial W}{\partial k_j} \right)_{\mathbf{k}, t}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) \quad (45)$$

となる。3次元の群速度は(45)式で定義される。それは(44)式における伝播速度であり、これによって  $k_i$  が決定される。(44)式は特性曲線上の常微分方程式として

$$\frac{dk_i}{dt} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{k}, t} \quad \text{on} \quad \frac{dx_i}{dt} = \left( \frac{\partial W}{\partial k_i} \right)_{\mathbf{x}, t} \quad (46)$$

と表される。媒体が  $\mathbf{x}$  に関して一様であるときには、それぞれの特性曲線上で  $\mathbf{k}$  は定数となることに注意する。そして、そのとき特性曲線は  $(\mathbf{x}, t)$  空間内の直線である<sup>32</sup>。それぞれの  $\mathbf{k}$  の値は、それに対応する一定の群速度  $\mathbf{C}(\mathbf{k})$  で伝播する。しかし非均質媒体の場合はそのようにはならない。 $\mathbf{k}$  の値はそれが特性曲線に沿って伝播するにつれて変化し、また特性曲線はもはや直線ではない。さらに、分散関係  $\omega(\mathbf{x}, t) = W(\mathbf{k}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)$  を時間で微分すると(43)式第1式より

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial W}{\partial k_j} \right)_{\mathbf{x}, t} \frac{\partial k_j}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{x}} = - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial W}{\partial k_j} \right)_{\mathbf{x}, t} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}$$

したがって

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}$$

が得られる。すなわち、媒体が時間に依存しない場合にはそれぞれの特性曲線に沿って振動数は一定であるが、その他の場合には一定ではない。

$\mathbf{x}$  と  $\mathbf{k}$  をそれぞれ座標と運動量とみなして  $W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$  を Hamiltonian とすると、(46)式は力学の Hamilton 方程式に対応することは興味深いことである。 $\theta$  を消去する代わりに  $\omega = -\partial\theta/\partial t$  と  $\mathbf{k} = \partial\theta/\partial\mathbf{x}$  を分散関係に代入すると

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + W\left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}, t\right) = 0 \quad (47)$$

が得られる。これは位相  $\theta$  を作用とした Hamilton-Jacobi 方程式である。

もし  $W$  が  $\mathbf{x}$  と  $t$  に依存しないならば、初期分布  $k_i = f_i(\mathbf{x})$  に対する(46)式の解は

$$k_i(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = f_i(\boldsymbol{\xi}), \quad x_i(\boldsymbol{\xi}, t) = \xi_i + \mathcal{O}_i(\boldsymbol{\xi})t \quad (48)$$

ただし

<sup>32</sup> 先述のように媒体を記述するパラメータがゆっくり変化することを仮定し、分散関係が  $\omega = W(\mathbf{k}(\mathbf{x}, t))$  と表されるとすれば、 $\mathbf{k}$  が定数のとき群速度は一定である。

$$\varrho_i(\xi) = C_i(f(\xi))$$

となる。関係式

$$x_i = C_i(\mathbf{k})t \tag{49}$$

によって  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$  を定めれば、 $t = 0$  において原点から放出された全ての  $\mathbf{k}$  の値に対応する解が得られる。これは(41)式の多重 Fourier 積分の漸近展開から得られる特別な場合である。

これら様々の方程式の使用例は12章で与えられる。