11.6 Energy Propagation

2010/07　鈴木幸人

前節の運動学的導出は群速度の一つの役割を示すものであり波の幾何形状を定めるものである。群速度の二つ目の役割は、(27)式と(28)式：

$$\varphi = \Re\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\}$$

$$A(x,t) = 2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}W''(k)\right\}$$

における振幅分布 $A(x,t)$ に関するものである。ここでは、振幅 A の振る舞いとその群速度とのかかわりあいを、前節と全く同様の精神で直接的に扱うことを目指したい。明らかにエネルギーに関係するので、それはもっともらしいように思える。そしてエネルギー収支について直接的な記述ができると期待する。これは本当である。しかしながら、変分法による定式化を用いた最近の研究は、導出過程を改良し一般化したばかりでなく、この関係において恐らくエネルギーよりも“波の作用”の方がより基本的な概念であることを示している。変分法によるアプローチは少々デリケートであり、エネルギー伝播のより古典的な議論によって基礎を準備するのが有用である。

前と同様に、均質媒体の一次元問題から始める。そして Fourier 積分による解の表示を用いずに振幅分布の情報を得る方法について調べる。この最初のアプローチでは、特定のケースを扱わなければならない。Klein-Gordon 方程式

$$\varphi_{tt} - \alpha^2\varphi_{xx} + \beta^2\varphi = 0$$

は、微分の階数が可能な限り低く抑えられているので、扱う上で最も簡単なものの一つである。これは双曲型であり、その点で例外的であるが、今は波面（wavefront）を問題にしているのではなく、解の振動部分を問題にしている。付随するエネルギー方程式は容易に得ることができる。定数係数の場合には

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}(-\alpha^2\varphi_t\varphi_x) = 0 \qquad (50)$$

となる[33]。今、ゆっくり変化する波列

$$\varphi(x,t) = \Re\left(A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\right) = a(x,t)\cos[\theta(x,t) + \eta(x,t)],$$

$$a = |A|, \quad \eta = \arg A$$

ただし

---

[33] Klein-Gordon 方程式の両辺に φ_t を掛けると

$$\varphi_t\varphi_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2\right), \quad \varphi_t\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right),$$

$$\varphi_t\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_t\varphi_x) - \varphi_{tx}\varphi_x = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_t\varphi_x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_x^2\right)$$

であるから(50)式が得られる。

$$\frac{a_x}{a}, \frac{a_t}{a} \ll 1, \quad \frac{\eta_x}{\eta}, \frac{\eta_t}{\eta} \ll 1, \quad \frac{\theta_{xx}}{\theta_x}, \frac{\theta_{xt}}{\theta_x} \ll 1, \quad \frac{\theta_{tx}}{\theta_t}, \frac{\theta_{tt}}{\theta_t} \ll 1$$

を考える。これを(50)式に代入すると

$$\varphi_t = a_t \cos(\theta + \eta) - a(\theta_t + \eta_t) \sin(\theta + \eta) \sim -a\theta_t \sin(\theta + \eta) = a\omega \sin(\theta + \eta),$$
$$\varphi_x \sim -a\theta_x \sin(\theta + \eta) = -ak \sin(\theta + \eta)$$

より、エネルギー密度は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2 \\ &\quad \sim \frac{1}{2}a^2(\omega^2 + \alpha^2 k^2)\sin^2(\theta + \eta) + \frac{1}{2}\beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta) \end{aligned} \tag{51}$$

エネルギー流束は

$$-\alpha^2 \varphi_t \varphi_x \sim \alpha^2 a^2 \omega k \sin^2(\theta + \eta) \tag{52}$$

となる。より高次の微分を含む場合には、ω と k の微分（θ の二階微分）を含む項が現れるが、ゆっくり変化する波の仮定からそれらは微小量として無視できる。

興味があるのは全体的な量である ω, k, a の変化であって振動の詳細ではないので、(51)式と(52)式の（一周期にわたる）平均量を考える。すなわち、エネルギー密度の平均量：

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}a^2(\omega^2 + \alpha^2 k^2)\sin^2(\theta + \eta) + \frac{1}{2}\beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta)\right] d\theta \\ &= \frac{1}{4}a^2(\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2) \end{aligned} \tag{53}$$

およびエネルギー流束の平均量：

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha^2 a^2 \omega k \sin^2(\theta + \eta)\, d\theta = \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \omega k \tag{54}$$

を考える[34]。この特別な場合（Klein-Gordon方程式の場合）には、分散関係は

$$\omega = \pm\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2} \tag{55}$$

であるから、結局

---

[34] ここで ω, k, a の一周期にわたる変化は微小量として無視できるとしている。例えば

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} k(x)\theta_x(x)dx &\sim \int_{x_1}^{x_2}[k(x_1) + k_x(x_1)(x - x_1)]\theta_x(x)dx \\ &= k(x_1)\int_{x_1}^{x_2}\theta_x(x)dx + k_x(x_1)\int_{x_1}^{x_2}(x - x_1)\theta_x(x)dx \\ &\sim k_1\int_{x_1}^{x_2}\theta_x(x)dx \end{aligned}$$

である。なお

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sin^2(\theta + \eta)\, d\theta &= \int_\eta^{2\pi+\eta}\sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\sin^2\phi + \sin^2\phi\}d\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{1 - [\cos^2\phi - \sin^2\phi]\}d\phi = \frac{1}{2}\left\{2\pi - \int_0^{2\pi}\cos 2\phi\, d\phi\right\} \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

である。

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}a^2(\alpha^2 k^2 + \beta^2), \quad \mathcal{F} = \pm\frac{1}{2}\alpha^2 a^2 k\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2} \tag{56}$$

が得られる。一方、群速度は

$$C(k) = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \pm\frac{\alpha^2 k}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}} \tag{57}$$

であるから、(56)式より

$$\mathcal{F} = C(k)\mathcal{E} \tag{58}$$

なる関係が得られる。これは一般的に成り立つことがわかる。

エネルギーは全体的にバランスしなければならないという直観的な根拠から、“平均化された”エネルギー方程式

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(C\mathcal{E}) = 0 \tag{59}$$

を振幅 a を決定するための方程式として提案することは魅力的である。これは、*二つの群速度による軌跡の間の総エネルギーは一定である*という主張の微分形である。実際、二つの群速度 $C(k_1)$ と $C(k_2)$ で移動する点 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の間のエネルギー

$$E(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E}(x,t)dx \tag{60}$$

を考えると

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)dx + \frac{dx_2}{dt}(t)\mathcal{E}(x_2(t),t) - \frac{dx_1}{dt}(t)\mathcal{E}(x_1(t),t) \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)dx + C(k_2)\mathcal{E}(x_2(t),t) - C(k_1)\mathcal{E}(x_1(t),t) \end{aligned} \tag{61}$$

であるが[35]、(59)式より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left\{\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(C\big(k(x,t)\big)\mathcal{E}(x,t)\Big)\right\}dx \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)dx + \Big[C\big(k(x,t)\big)\mathcal{E}(x,t)\Big]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}dx + C(k_2)\mathcal{E}(x_2(t),t) - C(k_1)\mathcal{E}(x_1(t),t) \end{aligned}$$

であるから $dE/dt = 0$ となる。逆に $dE/dt = 0$ ならば(61)式より

---

[35] 一般に $F(x,y,z) = \int_x^y f(\xi,z)d\xi$ に対して（例えば $f \in C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ならば）

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -f(x,z), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = f(y,z), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \int_x^y \frac{\partial}{\partial z}f(\xi,z)d\xi$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F\big(x(t),y(t),z(t)\big) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\frac{dz}{dt}(t) \\ &= -\frac{dx}{dt}(t)f(x,z) + \frac{dy}{dt}(t)f(y,z) + \frac{dz}{dt}(t)\int_x^y \frac{\partial}{\partial z}f(\xi,z)d\xi \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\left\{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(C\big(k(x,t)\big)\mathcal{E}(x,t)\Big)\right\}dx=\frac{dE}{dt}(t)=0$$

これが任意の $x_1(t)$ と $x_2(t)$ で成り立つことから(59)式が得られる[36]。

この挙動は、$\mathcal{E}$ に対してではなくて a^2 自身に対してであるが、11.4 節において見出されていた。しかし、$\mathcal{E}=f(k)a^2, f(k)=(\alpha^2k^2+\beta^2)/2$ であるから、これを(59)式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}f(k)a^2+\frac{\partial}{\partial x}(Cf(k)a^2)=0$$

より

$$f(k)\left\{\frac{\partial a^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Ca^2)\right\}+a^2f'(k)\left\{\frac{\partial k}{\partial t}+C\frac{\partial k}{\partial x}\right\}=0 \tag{62}$$

が得られるが、(39)式より

$$\frac{\partial k}{\partial t}+C\frac{\partial k}{\partial x}=0 \tag{63}$$

であるから

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Ca^2)=0 \tag{64}$$

が成り立つ。すなわち、任意の k の関数は、(63)式が成り立つ限りにおいて、(59)式あるいは(64)式の微分の中と外に出し入れすることが出来る。 $\mathcal{E}$ に対して行った議論と全く同様にして、(64)式が、11.4 節で見出した結果、すなわち

$$Q(t)=\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}a^2(x,t)dx \tag{65}$$

が二つの群速度による軌跡の間で一定であることの微分形であることを示すことができる。したがって(64)式と(59)式の正当性が確認された。直接的な正当化は後に示すことになる。

また(63)式と(64)式の特性曲線による表記は

$$\frac{dk}{dt}=0,\quad \frac{da^2}{dt}=-a^2\frac{\partial C}{\partial x}=-a^2C'(k)k_x,\quad \frac{dx}{dt}=C(k) \tag{66}$$

となることに注意する（第１式と第３式より $k(x,t)$ が求まるので、第２式において k_x は既知の量として扱うことができる)。11.4 節に記した群速度の２つの役割に対応して、この群速度 $C(k)$ は*２重の特性速度*となっている。

11.3 節で得られた漸近解は中心波であるような特別な場合であり、そこでは $k(x,t)$ は x/t の関数として

$$\frac{x}{t}=C(k)$$

によって決められる。この場合、振幅方程式は

---

[36] $\mathcal{E}\in C^1\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$ を仮定する。

$$\frac{da^2}{dt} = -a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{a^2}{t}$$

となる。k 自身を特性変数として用いることができるので、その解は

$$a = t^{-1/2}\mathcal{P}(k)$$

と表すことができる[37]。ここで $\mathcal{P}(k)$ は任意の関数である。これは(28)式と一致しており、再びこのアプローチの妥当性が確認された。勿論、初期条件を何らかの形で用いなければ関数 $\mathcal{P}(k)$ を決定することはできず、これは漸近的な議論のみでは見つけることができない。

この初期値問題においては、実際は $\mathcal{P}(k)$ は(28)式：

$$A(x,t) = 2F_1(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

より与えられることを知っている。そして、そのとき(60)式によって与えられる群速度による軌跡 $k = k_1$ と $k = k_2$ の間のエネルギー $E(t)$ が

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E}(x,t)dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(k)a^2 dx \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(k)4F_1(k)F_1^*(k)\frac{2\pi}{t|W''(k)|}dx \\ &= 8\pi\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(k)\frac{F_1(k)F_1^*(k)}{t|W''(k)|}dx \\ &= 8\pi\int_{k_1}^{k_2} f(k)\frac{F_1(k)F_1^*(k)}{t|W''(k)|}|W''(k)t|dk \quad (x = W'(k)t, dx = |W''(k)t|dk) \\ &= 8\pi\int_{k_1}^{k_2} f(k)F_1(k)F_1^*(k)dk \end{aligned} \tag{67}$$

となるのは興味深いことである（$k_1 < k_2$ とした）。ここで $f(k)$ は(56)式に現れる係数 $f(k) = (\alpha^2k^2 + \beta^2)/2$ である。一方、(50)式より厳密な全エネルギーは

$$E_{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2\right)dx$$

であり、(16)式：

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa)e^{i\kappa x - iW(\kappa)t}d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa)\,e^{i\kappa x + iW(\kappa)t}d\kappa$$

と(18)式

$$F_1(-\kappa) = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) + \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) + \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} = F_2^*(\kappa)$$

---

37 $\frac{da^2}{a^2} = -\frac{dt}{t}$ より $\ln a^2 = -\ln t + \ln C = \ln Ct^{-1}$ したがって $a = \pm Ct^{-1/2}$ が得られる。

$$F_2(-\kappa) = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(-\kappa) - \frac{i\Phi_1(-\kappa)}{W(-\kappa)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0^*(\kappa) - \frac{i\Phi_1^*(\kappa)}{W(\kappa)}\right\} = F_1^*(\kappa)$$

から得られる厳密解を用いると

$$E_{\text{tot}} = 8\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa)F_1(\kappa)F_1^*(\kappa)d\kappa \tag{68}$$

と表される。

(58)式と(59)式を導いたエネルギーに関する議論は容易に多次元の場合に拡張することができる。Klein-Gordon 方程式：

$$\varphi_{tt} - \alpha^2\varphi_{x_jx_j} + \beta^2\varphi = 0$$

の例では、エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\alpha^2\varphi_t\varphi_{x_j}\right) = 0$$

であるから [38]、これにゆっくり変化する波列

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \Re\left(A(\boldsymbol{x},t)e^{i\theta(\boldsymbol{x},t)}\right) = a(\boldsymbol{x},t)\cos[\theta(\boldsymbol{x},t) + \eta(\boldsymbol{x},t)],$$

$$a = |A|, \quad \eta = \arg A$$

ただし

$$\frac{a_{x_j}}{a}, \frac{a_t}{a} \ll 1, \quad \frac{\eta_{x_j}}{\eta}, \frac{\eta_t}{\eta} \ll 1, \quad \frac{\theta_{x_ix_j}}{\theta_{x_i}}, \frac{\theta_{x_it}}{\theta_{x_i}} \ll 1, \quad \frac{\theta_{tx_j}}{\theta_t}, \frac{\theta_{tt}}{\theta_t} \ll 1 \quad (i,j = 1,2,3)$$

を代入すると

$$\varphi_t = a_t\cos(\theta+\eta) - a(\theta_t + \eta_t)\sin(\theta+\eta) \sim -a\theta_t\sin(\theta+\eta) = a\omega\sin(\theta+\eta),$$

$$\varphi_{x_j} \sim -a\theta_{x_j}\sin(\theta+\eta) = -ak_j\sin(\theta+\eta)$$

より

$$\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2$$

$$\sim \frac{1}{2}a^2\left(\omega^2 + \alpha^2k_j^2\right)\sin^2(\theta+\eta) + \frac{1}{2}\beta^2a^2\cos^2(\theta+\eta)$$

および

$$-\alpha^2\varphi_t\varphi_{x_j} \sim \alpha^2a^2\omega k_j\sin^2(\theta+\eta)$$

---

[38] Klein-Gordon 方程式の両辺に φ_t を掛けると

$$\varphi_t\varphi_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2\right), \quad \varphi_t\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right),$$

$$\varphi_t\varphi_{x_jx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_t\varphi_{x_j}\right) - \varphi_{tx_j}\varphi_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_t\varphi_{x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_{x_j}^2\right)$$

であるから

$$\varphi_t\left(\varphi_{tt} - \alpha^2\varphi_{x_jx_j} + \beta^2\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2\right) - \alpha^2\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_t\varphi_{x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_{x_j}^2\right)\right] + \beta^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2}\beta\varphi^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\alpha^2\varphi_t\varphi_{x_j}\right) = 0$$

が得られる。

が得られる。したがって、平均量

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2\left(\omega^2+\alpha^2k_j^2\right)\sin^2(\theta+\eta)+\frac{1}{2}\beta^2a^2\cos^2(\theta+\eta)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\omega^2+\alpha^2k_j^2+\beta^2\right)$$

および

$$\mathcal{F}_i=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha^2a^2\omega k_i\sin^2(\theta+\eta)\,d\theta=\frac{1}{2}\alpha^2a^2\omega k_i$$

に関して、Klein-Gordon 方程式の分散関係と群速度

$$\omega=\pm\sqrt{\alpha^2k_j^2+\beta^2},\quad C_i(\boldsymbol{k})=\pm\frac{\alpha^2k_i}{\sqrt{\alpha^2k_j^2+\beta^2}}$$

より

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}a^2\left(\alpha^2k_j^2+\beta^2\right),\quad \mathcal{F}_i=\pm\frac{1}{2}\alpha^2a^2k_i\sqrt{\alpha^2k_j^2+\beta^2}$$

したがって

$$\mathcal{F}_i=C_i\mathcal{E} \tag{69}$$

が成り立つ。そこで平均エネルギー方程式

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j\mathcal{E}\right)=0 \tag{70}$$

を導入すると、群速度によって移動する体積 $V(t)$ 内の総エネルギーが不変であることが導かれる。実際

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)dV=\frac{d}{dt}\int_{V(0)}\mathcal{E}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)J(\boldsymbol{X},t)dV_0$$

$$=\int_{V(0)}\left[\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)+\mathcal{E}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)\mathrm{div}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\boldsymbol{X},t)\right)\right]J(\boldsymbol{X},t)dV_0$$

$$=\int_{V(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},t)\cdot\mathrm{grad}\,\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)+\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},t)\right]dV$$

$$=\int_{V(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)+\mathrm{div}\left\{C(\boldsymbol{x},t)\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)\right\}\right]dV=0$$

が成り立つ[39]。(70)式の特性曲線による表記は

---

39 ここで

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}=\varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\right\}$$

$$=\varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial C_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial C_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial C_3}{\partial X_k}\right\}$$

$$=\varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial C_1}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial C_2}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial C_3}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial X_k}\right\}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dt} = -\frac{\partial C_j}{\partial x_j}\boldsymbol{\mathcal{E}} \quad \text{on } \frac{dx_i}{dt} = C_i(\boldsymbol{k})$$

となる。これによると、エネルギー密度の減衰は特性曲線に沿うベクトル場の発散 $\partial C_j/\partial x_j$ に起因することがわかる。均質媒体では、群速度に沿う曲線上で波数 $\boldsymbol{k}$ は一定の値をとる（(46)式参照)。したがって、$\boldsymbol{\mathcal{E}} = f(\boldsymbol{k})a^2$ より a も $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ と同じ方程式を満足する。このことは、(62)式の拡張として(70)式から直接確かめることもできる。漸近解析の結果：(41)式に対応する中心波の場合には、$\boldsymbol{k}$ は

$$\frac{x_i}{t} = C_i(\boldsymbol{k})$$

によって定められ、したがって

$$\frac{da^2}{dt} = -\frac{\partial C_j}{\partial x_j}a^2 = -\frac{n}{t}a^2$$

が得られる。これは (41)式の振幅変化に一致している。

平均化エネルギー方程式は、以前見出した振舞いと一致する正しい振幅分布を実際に与えることを見た。これは Fourier 変換を回避することができ、したがって一般化の望みを与えるといった点では満足できるものであるが、現在の形では、見たところ一般的な結果のように思える(69)式と(70)式が特定の方程式を変形することによってしか得ることができないといった点で完全に満足できるものではない。同じ形の議論を(7)式から(9)式の例について繰り返すならば、完全に同じ最終結果：(69)式と(70)式を見出すことができる。

$$= \frac{\partial C_1}{\partial x_1}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}$$
$$= \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}\right)\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}\right)J$$

なる関係を用いた。