11.7 The Variational Apploach

2010/07　鈴木幸人

このアプローチはまず最初にもっとずっと難しい場合である非線型波列に対して開発された。そして多くの派生的な結果がある。完全な扱いはこれらの話題の更なる展開を待たなければならないが、いままでの議論を完結するためには十分である。

まず関数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ の変分原理

$$\delta J=\delta\int_R L(\varphi_t,\varphi_{\boldsymbol{x}},\varphi)dtd\boldsymbol{x} \tag{71}$$

を考える。変分原理は、任意の有限領域 $R\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ にわたる積分 $J[\varphi]$ が小さな変化に対して次の意味で停留しなければならないことを意味する。すなわち、h が“小さい”として二つの隣接した関数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ と $\varphi(\boldsymbol{x},t)+h(\boldsymbol{x},t)$ を考える。(71)式は一階の微分を含んでいるので、これらの関数は両方とも微分可能で導関数も連続であるとする[40]。h の小ささは“ノルム”

$$\|h\|=\max_{(\boldsymbol{x},t)\in R}|h(\boldsymbol{x},t)|+\max_{(\boldsymbol{x},t)\in R}|h_t(\boldsymbol{x},t)|+\sum_j\max_{(\boldsymbol{x},t)\in R}\left|h_{x_j}(\boldsymbol{x},t)\right|$$

で測られる[41]。関数 L は通常はある程度簡単な関数であり、確かに有界かつ連続の二階微分をもつと仮定することができる。そのとき

$$\begin{aligned}\delta J[\varphi,h]&=\frac{d}{d\epsilon}J[\varphi+\epsilon h]|_{\epsilon=0}\\&=\frac{d}{d\epsilon}\int_R L((\varphi+\epsilon h)_t,(\varphi+\epsilon h)_{\boldsymbol{x}},\varphi+\epsilon h)dtd\boldsymbol{x}\Big|_{\epsilon=0}\\&=\int_R\left\{L_{\varphi_t}h_t+L_{\varphi_{x_j}}h_{x_j}+L_\varphi h\right\}dtd\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{72}$$

である[42]が、特に変分 $h:R\to\mathbb{R}$ を R の境界で $h=0$ となるようにとる[43]と

$$\delta J[\varphi,h]=\int_R\left\{-\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t}-\frac{\partial}{\partial x_j}L_{\varphi_{x_j}}+L_\varphi\right\}hdtd\boldsymbol{x} \tag{73}$$

が得られる。これが任意の $h\in C_0^1(R)$ に対して成り立たなければならないことから

$$\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t}+\frac{\partial}{\partial x_j}L_{\varphi_{x_j}}-L_\varphi=0 \tag{74}$$

この議論は L が φ の二階微分あるいはさらなる高階微分を含む場合にも自然に拡張することができる。その場合、対応する変分方程式は部分積分の結果

---

40 すなわち $h\in C^1(R)$ とする。

41 $C^1(R)$ はこのノルムに関して完備である。

42 各 $\varphi\in C^1(R)$ に対して $\delta J[\varphi,\cdot\,]:C^1(R)\to\mathbb{R}$ は

$$J[\varphi+h]-J[\varphi]=\delta J[\varphi,h]+o(\|h\|),\quad \|h\|\to 0$$

なる線型汎関数として定義される。

43 すなわち $h\in C_0^1(R)$ とする。

$$L_\varphi - \frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j}L_{\varphi_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_j}L_{\varphi_{tx_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}L_{\varphi_{x_jx_k}} + \cdots = 0 \tag{75}$$

と表される。(74)式および(75)式は $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ の偏微分方程式であり、この形の方程式はそれと同値な変分原理による定式化を与えることができる。幾つかの関数 $\varphi^{(\alpha)}(\boldsymbol{x},t)$ を含む変分原理では、(それらは独立に変化することができるので) それぞれの $\varphi^{(\alpha)}(\boldsymbol{x},t)$ に対して(75)式の形の方程式、すなわち方程式系が導かれる。与えられた方程式系に対して変分原理を見つけるという問題は難しい場合があるが、一つの方程式のみが含まれる場合には通常は簡単である。(6)式～(8)式:

$$\varphi_{tt} - \alpha^2\nabla^2\varphi + \beta^2\varphi = 0,\quad \omega = \pm\sqrt{\alpha^2|\kappa|^2+\beta^2} \tag{6}$$

$$\varphi_{tt} - \alpha^2\nabla^2\varphi = \beta^2\nabla^2\varphi_{tt},\quad \omega = \pm\frac{\alpha|\kappa|}{\sqrt{1+\beta^2|\kappa|^2}} \tag{7}$$

$$\varphi_{tt} + \gamma^2\varphi_{xxxx} = 0,\quad \omega = \pm\gamma\kappa^2 \tag{8}$$

に挙げた例の場合は、それぞれ

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_i}^2 - \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2, \\ L &= \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_i}^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi_{tx_i}^2, \\ L &= \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\varphi_{xx}^2 \end{aligned} \tag{76}$$

となる[44]。(9)式

$$\varphi_t + \alpha\phi_x + \beta\varphi_{xxx} = 0,\quad \omega = \alpha\kappa - \beta\kappa^3 \tag{9}$$

の場合は

$$L = \frac{1}{2}\psi_t\psi_x + \frac{1}{2}\alpha\psi_x^2 - \frac{1}{2}\beta\psi_{xx}^2,\quad \varphi = \psi_x$$

である[45]。

---

44 それぞれ

$$-\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_i}L_{\varphi_{x_i}} + L_\varphi = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha^2\varphi_{x_i} - \beta^2\varphi = -\varphi_{tt} + \alpha^2\varphi_{x_ix_i} - \beta^2\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_i}L_{\varphi_{x_i}} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}L_{\varphi_{tx_i}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha^2\varphi_{x_i} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}\beta^2\varphi_{tx_i} \\ &= -\varphi_{tt} + \alpha^2\varphi_{x_ix_i} + \beta^2\varphi_{ttx_ix_i} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{\varphi_{xx}} = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma^2\varphi_{xx} = -\varphi_{tt} - \gamma^2\varphi_{xxxx} = 0$$

である。

45 ψ に対して

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}L_{\psi_t} - \frac{\partial}{\partial x}L_{\psi_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{\psi_{xx}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi_x}{2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_t}{2} + \alpha\psi_x\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta\psi_{xx} \\ &= -\frac{1}{2}\psi_{xt} - \frac{1}{2}\psi_{tx} - \alpha\psi_{xx} - \beta\psi_{xxxx} = 0 \end{aligned}$$

であるから

$$-\varphi_t - \alpha\varphi_x - \beta\varphi_{xxx} = 0$$

が得られる。

ゆっくり変化する波列

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \Re\big(A(\boldsymbol{x},t)e^{i\theta(\boldsymbol{x},t)}\big) = a(\boldsymbol{x},t)\cos[\theta(\boldsymbol{x},t)+\eta(\boldsymbol{x},t)],$$
$$a = |A|, \quad \eta = \arg A \tag{77}$$

ただし

$$\frac{a_{x_j}}{a}, \frac{a_t}{a} \ll 1, \quad \frac{\eta_{x_j}}{\eta}, \frac{\eta_t}{\eta} \ll 1, \quad \frac{\theta_{x_i x_j}}{\theta_{x_i}}, \frac{\theta_{x_i t}}{\theta_{x_i}} \ll 1, \quad \frac{\theta_{t x_j}}{\theta_t}, \frac{\theta_{tt}}{\theta_t} \ll 1 \quad (i,j=1,2,3)$$

を調べるため、前節においてエネルギー密度とエネルギー流束を計算したのと全く同様にして Lagrangian を計算する。すなわち、(77)式を代入し、$a, \eta, \omega, \boldsymbol{k}$ の微分は小さいものとして無視し、その結果を 1 周期にわたって平均する。それぞれのケースにおける結果は関数 $\mathcal{L}(\omega, \boldsymbol{k}, a)$ の形に表される。特に、(76)式の例については

$$\mathcal{L} = \frac{a^2}{4}\big(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2 - \beta^2\big),$$
$$\mathcal{L} = \frac{a^2}{4}\big(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2 + \beta^2\omega^2 k_j^2\big), \tag{78}$$
$$\mathcal{L} = \frac{a^2}{4}(\omega^2 - \gamma^2 k^4)$$

となる[46]。

ここで、$a(\boldsymbol{x},t), \theta(\boldsymbol{x},t)$ に対して“平均変分原理”

$$\delta \int_R \mathcal{L}(\theta_t, \theta_{\boldsymbol{x}}, a)\,dt\,d\boldsymbol{x} = 0 \tag{79}$$

を提案する。これは(59)式の提案と同様のものであるが、もっとずっと微妙な問題であり、後に詳しく調査しなければならない。しかしながら、とりあえずこれを受け入れておくこ

---

[46] ゆっくり変化する波列に対しては

$$\varphi_t = a_t\cos(\theta+\eta) - a(\theta_t+\eta_t)\sin(\theta+\eta) \sim -a\theta_t\sin(\theta+\eta) = a\omega\sin(\theta+\eta),$$
$$\varphi_{x_j} \sim -a\theta_{x_j}\sin(\theta+\eta) = -ak_j\sin(\theta+\eta),$$
$$\varphi_{tx_j} \sim -a\theta_t\theta_{x_j}\cos(\theta+\eta) = a\omega k_j\cos(\theta+\eta),$$
$$\varphi_{xx} \sim -a\theta_x\theta_x\cos(\theta+\eta) = -ak^2\cos(\theta+\eta)$$

であるから

$$L = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_i}^2 - \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2 \sim \frac{1}{2}a^2\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2\big)\sin^2(\theta+\eta) - \frac{1}{2}\beta^2a^2\cos^2(\theta+\eta),$$
$$L = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_i}^2 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi_{tx_i}^2 \sim \frac{1}{2}a^2\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2\big)\sin^2(\theta+\eta) + \frac{1}{2}\beta^2a^2\omega^2k_j^2\cos^2(\theta+\eta),$$
$$L = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\varphi_{xx}^2 \sim \frac{1}{2}a^2\omega^2\sin^2(\theta+\eta) - \frac{1}{2}\gamma^2a^2k^4\cos^2(\theta+\eta)$$

したがって

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2\big)\sin^2(\theta+\eta) - \frac{1}{2}\beta^2a^2\cos^2(\theta+\eta)\right]d\theta \sim \frac{a^2}{4}\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2-\beta^2\big),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2\big)\sin^2(\theta+\eta) + \frac{1}{2}\beta^2a^2\omega^2k_j^2\cos^2(\theta+\eta)\right]d\theta$$
$$\sim \frac{a^2}{4}\big(\omega^2-\alpha^2k_j^2+\beta^2\omega^2k_j^2\big),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2\omega^2\sin^2(\theta+\eta) - \frac{1}{2}\gamma^2a^2k^4\cos^2(\theta+\eta)\right]d\theta \sim \frac{a^2}{4}(\omega^2-\gamma^2k^4)$$

が得られる。

とにする。ただちに、これは一般的で大変強力なアプローチであることがわかるであろう。

平均 Lagrangian には a の微分は（微小量として無視しており）含まれないから、a の変分からは

$$\delta a: \quad \mathcal{L}_a = 0$$

が得られるのみである。θ の変分からは

$$\delta\theta: \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{\theta_{x_j}} = 0$$

が得られる [47]。これらの表現においては、θ への依存はその微分を通してのみ関係している。したがって、*一度変分方程式が得られたならば*、通常は $\omega, \boldsymbol{k}, a$ を変数とした方が便利である。すなわち

$$\mathcal{L}_a = 0 \tag{80}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{k_j} = 0 \tag{81}$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0 \tag{82}$$

なる方程式系を考える。ただし最後の式は θ が存在するための条件式（consistency equations）である。

(80)式は $\omega, \boldsymbol{k}, a$ の間の（汎関数）関係を表しており、したがって分散関係以外の何物でもない。(78)式からこのことを確かめることができる。実際、どのような線型問題においても、L は φ とその微分の二次式でなければならないのは明らかであり [48]、その結果として $\mathcal{L}$ は次の形をとらなければならない。

$$\mathcal{L} = G(\omega, \boldsymbol{k})a^2 \tag{83}$$

このとき、(80)式より分散関係は

$$G(\omega, \boldsymbol{k}) = 0 \tag{84}$$

となり、$\mathcal{L}$ の中の関数 $G(\omega, \boldsymbol{k})$ は分散関係式以外の何物でもない。この結論を得るのに、それぞれの場合について $\mathcal{L}$ を計算する必要さえなかった！

---

[47] 実際、任意の $\delta\theta, \delta a \in C_0^1(R)$ に対して

$$\begin{aligned}\delta \int_R \mathcal{L}(-\theta_t, \theta_{\boldsymbol{x}}, a)\,dt\,d\boldsymbol{x} &= \frac{d}{d\epsilon}\int_R \mathcal{L}(-(\theta+\epsilon\delta\theta)_t, (\theta+\epsilon\delta\theta)_{\boldsymbol{x}}, a+\epsilon\delta a)\,dt\,d\boldsymbol{x}\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_R \left(\mathcal{L}_{\theta_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\theta + \mathcal{L}_{\theta_{x_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}\delta\theta + \mathcal{L}_a\delta a\right)dt\,d\boldsymbol{x} \\ &= \int_R \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{\theta_{x_j}}\right)\delta\theta + \mathcal{L}_a\delta a\right]dt\,d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

である。

[48] Euler-Lagrange 方程式

$$L_\varphi - \frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j}L_{\varphi_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_j}L_{\varphi_{tx_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}L_{\varphi_{x_jx_k}} + \cdots = 0$$

が線型であるためには、$L_\varphi, L_{\varphi_t}, L_{\varphi_{x_j}}, L_{\varphi_{tt}}, L_{\varphi_{tx_j}}, L_{\varphi_{x_jx_k}}, \ldots$ が線型、すなわち L が $\varphi, \varphi_t, \varphi_{x_j}, \varphi_{tt}, \varphi_{tx_j}, \varphi_{x_jx_k}, \ldots$ に関して二次でなければならない。

これは全く予期しなかった特典である。当初の目的は振幅方程式に対する一般的な議論を見つけることであった。しかし、実際には 11.5 節で提案した波動パターンの幾何形状に対する運動論的理論も含まれていた。(80)式と(82)式はまさにその理論を与えるものである。

$\mathscr{L}$ の停留値が実際 0 になることを注意しておく。L が運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差として与えられる単純な場合には、((79)式の最終的な正当化に関係して）これはその平均値が等しいことを示している。これは良く知られた線型問題に対するエネルギー等分配である。

次に、(81)式の振幅方程式に関しては、(83)式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}[G(\omega,\boldsymbol{k})a^2]_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j}[G(\omega,\boldsymbol{k})a^2]_{k_j} = \frac{\partial}{\partial t}(G_\omega a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_{k_j} a^2\right) = 0 \tag{85}$$

と表せることに注意する。原理的には、(84)式は $\omega = W(\boldsymbol{k})$ の形に解くことができる [49]。すなわち

$$G(W(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}) = 0$$

は恒等式であり、したがって両辺を k_j で微分すると

$$G_\omega \frac{\partial W}{\partial k_j} + G_{k_j} = 0$$

が得られる。このとき、群速度は

$$C_j = \frac{\partial W}{\partial k_j} = -G_{k_j}/G_\omega \tag{86}$$

と表される [50]。これを用いると(85)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(\boldsymbol{k})a^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g(\boldsymbol{k})C_j(\boldsymbol{k})a^2\right) = 0 \tag{87}$$

と表される。ただし $g(\boldsymbol{k}) = G_\omega(W(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})$ と置いた。(82)式より

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + C_j\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0$$

であるから、(87)式は

$$\begin{aligned} &g\left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right)\right] + a^2\left(\frac{\partial g}{\partial t} + C_j\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) \\ &\quad = g\left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right)\right] + a^2\frac{\partial g}{\partial k_l}\left(\frac{\partial k_l}{\partial t} + C_j\frac{\partial k_l}{\partial x_j}\right) = 0 \end{aligned}$$

となり、したがって振幅方程式

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right) = 0$$

---

[49] 陰関数定理より、$\frac{\partial}{\partial \omega}G(\omega_0,\boldsymbol{k}) \neq 0$ ならば $\omega = \omega_0$ の近傍で $\omega = W(\boldsymbol{k})$ と表すことができる。

[50] $\omega = W(\boldsymbol{k})$ と表すことのできる条件より $G_\omega \neq 0$ である。

が得られる。以上より、変分方程式系：(80)式～(82)式から前２節で議論した方程式系が導出されることが示された。

一見すると、(87)式が(70)式の平均エネルギー方程式であると期待するかも知れない。しかし、具体例で確かめると $\mathcal{E}$ の係数 $f(\boldsymbol{k})$ と $g(\boldsymbol{k})$ は同じでないことが分かる[51]。しかしながら、変分原理とエネルギー方程式を関連付ける標準的な方法が存在する。Noetherの定理によると、変分原理を不変に保つ任意の変換群に対して、それに対応する保存方程式が存在する。もし変分原理が時間 t の並進に関して不変ならば、対応する方程式は必ずエネルギー方程式もしくはそれの係数倍である。(79)式は時間 t の並進に関して不変であるから、これに対応して次のエネルギー方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\omega\mathcal{L}_{k_j}\right) = 0 \tag{88}$$

ここでは、Noetherの定理の詳しい応用を推し進めるよりも、むしろ(88)式が(80)式～(82)式より得られる[52]ことに注意することで十分である。これがエネルギー方程式である。このことは、先に示した例について容易に確かめることができる[53]。

ここで考えている線型問題の場合には、$\mathcal{L}$ の停留値は0であった。したがって、(88)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\omega\mathcal{L}_{k_j}\right) = 0$$

となり、エネルギー密度 $\mathcal{E}$ とエネルギー流束 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{E} = \omega\mathcal{L}_\omega, \quad \mathcal{F} = -\omega\mathcal{L}_{k_j} \tag{89}$$

により与えられる。したがって

---

[51] Klein-Gordon 方程式の場合には $f(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 k_j^2 + \beta^2\right)$ であるが

$$G(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{4}\left(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2 - \beta^2\right), \quad W(k) = \pm\sqrt{\alpha^2 k_j^2 + \beta^2}$$

であるから

$$g(\boldsymbol{k}) = G_\omega(W(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}W(k) = \pm\frac{1}{2}\left(\alpha^2 k_j^2 + \beta^2\right)^{1/2}$$

である。

[52] 実際、(80)式～(82)式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\omega\mathcal{L}_{k_j}\right) &= \omega\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial\mathcal{L}_{k_j}}{\partial x_j}\right) + \mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} - \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial t} - \left(\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial t} + \mathcal{L}_a\frac{\partial a}{\partial t}\right) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

[53] Klein-Gordon 方程式の場合には

$$\omega = \pm\sqrt{\alpha^2 k_j^2 + \beta^2}, \quad C_i(\boldsymbol{k}) = \pm\alpha^2 k_i \Big/ \sqrt{\alpha^2 k_j^2 + \beta^2}$$

であるから

$$\omega\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L} = \omega\cdot\frac{\alpha^2}{2}\omega - \frac{\alpha^2}{4}\left(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2 - \beta^2\right) = \frac{\alpha^2}{4}\left(\omega^2 + \alpha^2 k_j^2 + \beta^2\right) = \frac{\alpha^2}{2}\left(\alpha^2 k_j^2 + \beta^2\right)$$

$$-\omega\mathcal{L}_{k_j} = -\omega\cdot\left(-\frac{\alpha^2}{2}\alpha^2 k_j\right) = \frac{\alpha^2}{2}\alpha^2\omega k_j = \pm\frac{\alpha^2}{2}\alpha^2 k_j\sqrt{\alpha^2 k_j^2 + \beta^2}$$

となり、それぞれ前節の平均エネルギー密度と平均エネルギー流束に一致する。

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{\mathcal{E}}{\omega} \tag{90}$$

であるが、(83)式：$\mathcal{L} = G(\omega, \boldsymbol{k})a^2$ より

$$\mathcal{L}_\omega = G_\omega a^2, \quad \mathcal{L}_{k_j} = G_{k_j} a^2$$

であるから

$$\mathcal{L}_{k_j} = G_{k_j} a^2 = \frac{G_{k_j}}{G_\omega} G_\omega a^2 = -C_j \mathcal{L}_\omega = -C_j \frac{\mathcal{E}}{\omega}$$

これらを(81)式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathcal{E}}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j \frac{\mathcal{E}}{\omega}\right) = 0 \tag{91}$$

が得られる。

この一般的なアプローチからもう一つの特典が得られる。そこでは、(90)式の量と(81)式および(91)式に特に注目する。$\mathcal{E}/\omega$ なる量は、通常の力学において、線型振動系のゆっくりとした変調に対する断熱不変量として良く知られたものである。後に、非線型のケースでは $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{E}/\omega$ が適切な量であることが示される。したがって、これらの概念は波の場合に拡張されたことになる。保存量の代わりに、時間的な断熱不変量 $\mathcal{L}_\omega$ と空間的な量 $-\mathcal{L}_{k_j}$ により支配された保存方程式：(81)式をとりあげる。この保存方程式は“波の作用（wave action）”の保存として知られるようになった。

(88)式において x_i と t の役割を交換した“波の運動量（wave momentum）”の方程式もある。

$$\frac{\partial}{\partial t}(k_i \mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-k_i \mathcal{L}_{k_j} + \mathcal{L}\delta_{ij}\right) = 0 \tag{92}$$

これが成り立つことは、(80)式～(82)式より容易に確かめることができる[54]。運動量密度は

$$k_i \mathcal{L}_\omega = \frac{k_i}{\omega}\mathcal{E} \tag{93}$$

であることに注意する。これは k 方向の（c を位相速度として）大きさ $\mathcal{E}/c$ をもつベクトルである。ここで、また（他の方法では立証することが困難な）良く知られた結果の一般的な証明が得られた。

Nonuniform Media

変分原理によるアプローチのもう一つの優位点は、媒体が $\boldsymbol{x}$ と t に関してゆっくり変

---

[54] 実際、(80)式～(82)式より

$$\frac{\partial}{\partial t}(k_i \mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-k_i \mathcal{L}_{k_j} + \mathcal{L}\delta_{ij}\right) = k_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}_{k_j}}{\partial x_j}\right) + \mathcal{L}_\omega \frac{\partial k_i}{\partial t} - \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$
$$= -\mathcal{L}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i} + \left(\mathcal{L}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i} + \mathcal{L}_a \frac{\partial a}{\partial x_i}\right) = 0$$

が成り立つ。

化しても基礎方程式：(80)式～(82)式が変わらないことである。例えば、(76)式においてパラメータ α,β,γ が $(\boldsymbol{x},t)$ の関数である場合がこれにあたる[55]。もし1周期の間の変化が小さいならば、$\omega,\boldsymbol{k},a,\eta$ の微分による寄与とともに1周期の間の α,β,γ の変化を無視することによって、前と同じように平均Lagrangianを形成することができる。そして同様に(79)式を提案する。違いは $\mathcal{L}$ が関数 $a(\boldsymbol{x},t),\theta(\boldsymbol{x},t)$ に加えて $\boldsymbol{x}$ と t にも陽に依存するようになることである。しかし変分方程式：(80)式～(82)式に変化はない。方程式の操作と展開において、さらなる微分を含めることを注意する必要があるのみである。特に、容易に確かめられるようにエネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathcal{L}_\omega-\mathcal{L})+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\omega\mathcal{L}_{k_j}\right)=-\mathcal{L}_t \tag{94}$$

となる[56]。同様に運動量方程式：(92)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(k_i\mathcal{L}_\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-k_i\mathcal{L}_{k_j}+\mathcal{L}\delta_{ij}\right)=\mathcal{L}_{x_i}$$

となる[57]。もし媒体が時間 t に依存するならばエネルギーは保存しない。もし $\boldsymbol{x}$ に依存するならば運動量は保存しない。しかし波の作用（wave action）はすべての場合において保存する。この点においても、変調理論においてはエネルギー方程式よりも(81)式の方が好ましい。

---

[55]例えば Klein-Gordon 方程式の場合には

$$L=\frac{1}{2}\varphi_t^2-\frac{1}{2}\alpha(x,t)^2\varphi_x^2-\frac{1}{2}\beta(x,t)^2\varphi^2$$

より

$$\begin{aligned}&\delta J[\varphi,\delta\varphi]\\&\quad=\frac{d}{d\eta}\int_R[\tfrac{1}{2}(\varphi_t+\eta\delta\varphi_t)^2-\tfrac{1}{2}\alpha(x,t)^2(\varphi_x+\eta\delta\varphi_x)-\tfrac{1}{2}\beta(x,t)^2(\varphi+\eta\delta\varphi)^2]dtdx\Big|_{\eta=0}\\&\quad=\int_R[\varphi_t\delta\varphi_t-\alpha(x,t)^2\varphi_x\delta\varphi_x-\beta(x,t)^2\varphi\delta\varphi]dtdx\\&\quad=\int_R\left[-\varphi_{tt}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x,t)^2\varphi_x)-\beta(x,t)^2\varphi\right]\delta\varphi dtdx\end{aligned}$$

したがって

$$\varphi_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x,t)^2\varphi_x)+\beta(x,t)^2\varphi=0$$

が得られる（次節の(104)式参照）。

[56] 波の作用の方程式：(81)式が成り立つことから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathcal{L}_\omega-\mathcal{L})+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\omega\mathcal{L}_{k_j}\right)&=\omega\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\omega}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{L}_{k_j}}{\partial x_j}\right)+\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}-\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\\&=\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial t}-\left(\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial t}+\mathcal{L}_a\frac{\partial a}{\partial t}+\mathcal{L}_t\right)=-\mathcal{L}_t\end{aligned}$$

が得られる。

[57] 波の作用の方程式：(81)式が成り立つことから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(k_i\mathcal{L}_\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-k_i\mathcal{L}_{k_j}+\mathcal{L}\delta_{ij}\right)&=k_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\omega}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{L}_{k_j}}{\partial x_j}\right)+\mathcal{L}_\omega\frac{\partial k_i}{\partial t}-\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\\&=-\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}-\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i}+\left(\mathcal{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+\mathcal{L}_{k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i}+\mathcal{L}_a\frac{\partial a}{\partial x_i}+\mathcal{L}_{x_i}\right)=\mathcal{L}_{x_i}\end{aligned}$$

が得られる。

Nonlinear Wavetrains

最後に、変分原理によるアプローチは、非線型の波列における変調を調べる際にもほんの少しの修正しか必要としない。主な問題は、(77)式に代る関数形をどうするか、関数 $\mathscr{L}$ を求めるための平均をどうするか、そして一般的に、完全な記述を行う際に $\omega, \boldsymbol{k}, a$ のような全体的な関数が新たに出現するか否かである。しかし、もっとも単純な場合では、最後のものは問題にならない。すなわち、一度 $\mathscr{L}(\omega, \boldsymbol{k}, a)$ を見つけることができれば、(80)式～(82)式はそのまま適用できる。大きい違いは、$\mathscr{L}$ はもはや単純に a^2 に比例するものではなく、(80)式と(82)式は(81)式から分離できないという決定的に重要なものである。これらの問題と今まで示した理論の慎重な正当化は１４章においてとりあげられるであろう。