11.8 The Direct Use of Asymptotic Expansions

2010/08　鈴木幸人

Fourier 積分を回避し、非均質媒体や非線型系の問題に拡張する道を開くためのより明白な方法は、適当な形の漸近級数を問題の方程式に直接代入することである。今まで議論してきた線型問題の場合には、要求される展開の形は

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)\sim e^{i\theta(\boldsymbol{x},t)}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\boldsymbol{x},t) \tag{95}$$

である。ここで A_n は関連した微小パラメータに関して順次小さいオーダーをとる項を表す[58]。現在の文脈では、この形は(27)式：

$$\varphi(x,t)=\Re\left\{A(x,t)e^{i\theta(x,t)}\right\}$$

で得られた初項によって示唆されるものである。それはまた(7.62)式で議論した幾何光学級数の拡張でもある。前の双曲型問題の場合には、θ_t と $\theta_{\boldsymbol{x}}$ の関係は同次であり、その議論の中で行ったように、固定した ω に対して $\theta(x,t)=\omega S(x,t)$ を選ぶことができる。ここでは θ_t と $\theta_{\boldsymbol{x}}$ の間の分散関係はより一般的であり、振動数の連続的な分布を許している。

(95)式を用いたアプローチは、非均質媒体に適用できる点においては満足できるものである。しかし、11.6 節で平均エネルギー方程式を通して行った議論のときよりもさらに、それぞれの特別な場合に特有な数式について扱わなければならず、そのまさに最後になって得られた結果が一般的なものであったと分かる類のものである。非線型問題に拡張する場合には、適当な展開形式は直ちには明らかでなく、数式の変形操作が非常に煩雑になる場合もあり、そしてこの場合にも一般的な結果は個々の詳細に隠されることになる。これらの弱点は(95)式のような表現を直接問題の変分形式に適用することによって改善される。これによって、本質的に、変分原理によるアプローチが正当化されている。しかし、いくらかの巧妙さが含まれており、背景として、ここで方程式へ(95)式を直接適用した場合の議論を含めておくのは有用である。一次元の場合を扱うことで十分である。

11.3 節で議論した展開は x/t を固定して $t\to\infty$ とした場合に有効である。その場合には、$\theta(x,t)$ と $A_n(x,t)$ は次の形をとる[59]。

$$\theta(x,t)=t\tilde{\theta}\left(\frac{x}{t}\right),\quad A_n(x,t)=t^{-n-\frac{1}{2}}B_n\left(\frac{x}{t}\right) \tag{96}$$

---

[58] すなわち微小パラメータを ϵ とするとき $\exists\gamma>0, A_{n+1}\sim O(\epsilon^{\gamma})A_n$ である。

[59] 例えば(22)式において

$$\varphi(x,t)\simeq F(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}}\exp\left\{ikx-iW(k)t-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}W''(k)\right\}$$

$$=F(k)\sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}}\exp\left\{-i\chi(k)t-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''(k)\right\},\ \chi(k)=W(k)-kx/t$$

ただし $\chi'(k)=W'(k)-x/t=0$ であるから

$$\theta=-\chi\big(k(x/t)\big)t,\quad A_0=t^{-1/2}F\big(k(x/t)\big)\sqrt{2\pi/\left|\chi''\big(k(x/t)\big)\right|}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\chi''\left(k\left(\frac{x}{t}\right)\right)\right\}$$

と表すことができる。さらに(23)式より $A_1=t^{-\frac{1}{2}}t^{-1}B_1(x/t)$ と表すことができる。

(95)式の展開は t^{-1} の昇冪となる（厳密には τ/t の冪になる。ここで τ は方程式のパラメータと初期条件によって導入される時間スケールである[60]）。手法の柔軟性を確保し、(95)式を異なった状況に用いたときの共通の特性をみるために、(96)式を直接には導入せず、

$$\frac{\partial A_n}{\partial t}, \frac{\partial A_n}{\partial x} = O(A_{n+1}), \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} = O(A_{n+2}), \dots \tag{97}$$

であるとする。すなわち、それぞれの微分はオーダーを 1 つ増加させる。同様に θ_x と θ_t のオーダーは $O(1)$ とし、それ以上の階数の微分は 1 階毎に 1 つオーダーが増加するものとする[61]。微分をとる毎にオーダーが増加することは、θ_t, θ_x および A_n が*ゆっくり変化する関数*であることを示している。これは、展開が τ/t に基づくものか他の量に基づくものかにかかわらず、(95)式を使う際の一般的な特徴である。

例として一次元 Klein-Gordon 方程式をとりあげる。

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \beta^2 \varphi = 0$$

(95)式の展開を代入し、それぞれのオーダーにおいて釣り合うものとすると

$$\varphi \sim e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t),$$

$$\varphi_t \sim i\theta_t(x,t) e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) + e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nt}(x,t),$$

$$\varphi_{tt} \sim i\theta_{tt}(x,t) e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) + [i\theta_t(x,t)]^2 e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) + 2i\theta_t(x,t) e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nt}(x,t) + e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{ntt}(x,t),$$

$$\varphi_{xx} \sim i\theta_{xx}(x,t) e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) + [i\theta_x(x,t)]^2 e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) + 2i\theta_x(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} A_{nx}(x,t) + e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nxx}(x,t)$$

より

$$[i\theta_t]^2 e^{i\theta} A_0 - \alpha^2 [i\theta_x]^2 e^{i\theta} A_0 + \beta^2 e^{i\theta} A_0 = 0,$$

$$\left(i\theta_{tt} e^{i\theta} A_0 + [i\theta_t]^2 e^{i\theta} A_1 + 2i\theta_t e^{i\theta} A_{0t}\right) - \alpha^2 \left(i\theta_{xx} e^{i\theta} A_0 + [i\theta_x]^2 e^{i\theta} A_1 + 2i\theta_x e^{i\theta} A_{0x}\right) + \beta^2 e^{i\theta} A_1 = 0,$$

$$\left(i\theta_{tt} e^{i\theta} A_1 + [i\theta_t]^2 e^{i\theta} A_2 + 2i\theta_t e^{i\theta} A_{1t} + e^{i\theta} A_{0tt}\right) - \alpha^2 \left(i\theta_{xx} e^{i\theta} A_0 + [i\theta_x]^2 e^{i\theta} A_1 + 2i\theta_x e^{i\theta} A_{0x} + e^{i\theta} A_{0xx}\right) + \beta^2 e^{i\theta} A_2 = 0, \cdots$$

したがって

---

60 脚注 18 に示したように高次項は（初期値が定める長さスケールが十分小さいとき） τ/t の冪になる。

61 (96)式より $\theta_x = \tilde{\theta}'(x/t), \theta_t = \tilde{\theta}(x/t) - (x/t)\tilde{\theta}'(x/t)$ である。

$$(\theta_t^2-\alpha^2\theta_x^2-\beta^2)A_0=0,$$
$$-(\theta_t^2-\alpha^2\theta_x^2-\beta^2)A_1+i(\theta_{tt}-\alpha^2\theta_{xx})A_0+2i(\theta_tA_{0t}-\alpha^2\theta_xA_{0x})=0,$$
$$-(\theta_t^2-\alpha^2\theta_x^2-\beta^2)A_2+i(\theta_{tt}-\alpha^2\theta_{xx})A_1+2i(\theta_tA_{1t}-\alpha^2\theta_xA_{1x})+A_{0tt}-\alpha^2A_{0xx}=0,\cdots$$

が得られる。最初の方程式が成り立つことによって、それ以降の方程式の対応する部分は0になる。さらに

$$k=\theta_x,\quad \omega=-\theta_t$$

を導入すると、上記の方程式列は

$$\omega^2-\alpha^2k^2-\beta^2=0 \tag{98}$$
$$(\omega_t+\alpha^2k_x)A_0+2(\omega A_{0t}+\alpha^2kA_{0x})=0 \tag{99}$$
$$(\omega_t+\alpha^2k_x)A_1+2(\omega A_{1t}+\alpha^2kA_{1x})=-i(A_{0tt}-\alpha^2A_{0xx}) \tag{100}$$

となる。

最初の方程式は ω と k の間の分散関係であり、θ の代わりに ω と k を変数として用いるならば、無矛盾関係（consistency relation）

$$k_t+\omega_x=0 \tag{101}$$

が加わる。これはまさに 11.5 節に記した θ,ω,k の決定方法である。

A_0 に対する方程式は、(99)式より

$$\frac{1}{2}\omega_tA_0+\omega A_{0t}+\frac{1}{2}\alpha^2k_xA_0+\alpha^2kA_{0x}=0$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\omega A_0A_0^*\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\alpha^2kA_0A_0^*\right)=0 \tag{102}$$

となる[62]。Klein-Gordon方程式の平均Lagrangianは(78)式より

$$\mathcal{L}=\frac{a^2}{4}(\omega^2-\alpha^2k^2-\beta^2)$$

であり $|A_0|^2=a^2$ であるから、(102)式は波の作用の方程式：(81)式

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_k=0 \tag{81}$$

に一致する[63]。エネルギー方程式も勿論(99)式から得ることができるけれども、エネルギー

---

[62] 実際、(99)式より

$$\left[\frac{1}{2}\omega_tA_0+\omega A_{0t}+\frac{1}{2}\alpha^2k_xA_0+\alpha^2kA_{0x}\right]A_0^*+\left[\frac{1}{2}\omega_tA_0+\omega A_{0t}+\frac{1}{2}\alpha^2k_xA_0+\alpha^2kA_{0x}\right]^*A_0$$
$$=\frac{1}{2}\omega_t(A_0A_0^*+A_0^*A_0)+\omega(A_{0t}A_0^*+A_{0t}^*A_0)$$
$$+\frac{1}{2}\alpha^2k_x(A_0A_0^*+A_0^*A_0)+\alpha^2k(A_{0x}A_0^*+A_{0x}^*A_0)$$
$$=\omega_tA_0A_0^*+\omega(A_0A_0^*)_t+\alpha^2k_xA_0A_0^*+\alpha^2k(A_0A_0^*)_x=(\omega A_0A_0^*)_t+(\alpha^2kA_0A_0^*)_x=0$$

が成り立つ。

[63] 実際

方程式よりも波の作用の方程式の方が最も明白に現れてくるのは興味深いことである。Lagrangianの理論なしでは、この点は気付かずに通過してしまうであろうことを注意しておく。

通常は展開の１次の項のみ、したがって最初の２つの方程式：(98)式と(99)式のみが興味の対象である。しかしながら、θ と A_0 が見つかれば A_1 は(100)式を解くことにより得ることができる。A_2 はこの階層の次の方程式から得られ、以下同様である。

特殊なケースとして、方程式が(96)式の形の解をもつこと、およびその展開は 11.3 節の Fourier 積分から得られたものと一致することを確かめることができる。実際、(98)式と(101)式から得られる解は

$$\frac{x}{t} = C(k)$$

より定まる関数 $k(x/t)$ である。

この展開は中心波型の解に限ったものではない。それらは、(97)式の意味でゆっくり変化するどのような波列にも適用することができる。例えば、振動数と振幅のゆっくりした変化を与えるような、変調する振動源によって生成される波列を考えることができる。x と t が、元の x と t をそれぞれ固有の波長と固有の周期で割ることによって得られる無次元化された変数であるならば、振動源で与えられる変調は ϵt の関数であり、θ と A_n の適切な形は

$$\theta = \epsilon^{-1}\tilde{\theta}(\epsilon x, \epsilon t), \quad A_n = \epsilon^n \tilde{A}_n(\epsilon x, \epsilon t) \tag{103}$$

となる。ここで ϵ は固有の周期と変調の時間スケールとの比である。ϵ が関連した微小パラメータであるとき、変数は(97)式の意味でゆっくり変化することになる。Klein-Gordon 方程式の例では、結果として得られる方程式は(98)式～(99)式となる [64]。これらはそれぞれ

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{a^2}{2}\omega = \frac{1}{2}A_0 A_0^* \omega, \quad \mathcal{L}_k = -\frac{a^2}{2}\alpha^2 k = -\frac{1}{2}\alpha^2 k A_0 A_0^*$$

である。

[64] Klein-Gordon 方程式

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \beta^2 \varphi = 0$$

に

$$\varphi(x,t) \sim e^{i\epsilon^{-1}\theta(\epsilon x, \epsilon t)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n A_n(\epsilon x, \epsilon t), \quad \epsilon \ll 1$$

なる展開を代入すると

$$\varphi_t \sim e^{i\epsilon^{-1}\theta(\epsilon x,\epsilon t)}\left[i\theta_t(\epsilon x,\epsilon t)\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n(\epsilon x,\epsilon t) + \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+1}A_{nt}(\epsilon x,\epsilon t)\right]$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{tt} \sim e^{i\epsilon^{-1}\theta(\epsilon x,\epsilon t)}\{&i\theta_t(\epsilon x,\epsilon t)[i\theta_t(\epsilon x,\epsilon t)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n(\epsilon x,\epsilon t) + \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+1}A_{nt}(\epsilon x,\epsilon t)] \\
&+ i\epsilon\theta_{tt}(\epsilon x,\epsilon t)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n(\epsilon x,\epsilon t) + i\theta_t(\epsilon x,\epsilon t)\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+1}A_{nt}(\epsilon x,\epsilon t) \\
&+ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+2}A_{ntt}(\epsilon x,\epsilon t)\} \\
= e^{i\epsilon^{-1}\theta}\{&[i\theta_t]^2\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n + 2i\theta_t\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+1}A_{nt} + i\epsilon\theta_{tt}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n + \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+2}A_{ntt}\}
\end{aligned}$$

$$\varphi_{xx} \sim e^{i\epsilon^{-1}\theta}\{[i\theta_x]^2\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n + 2i\theta_x\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+1}A_{nx} + i\epsilon\theta_{xx}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n A_n + \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^{n+2}A_{nxx}\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&(-\theta_t^2 + \alpha^2\theta_x^2 + \beta^2)A_0 \\
&\quad + \epsilon[(-\theta_t^2 + \alpha^2\theta_x^2 + \beta^2)A_1 + 2i(\theta_t A_{0t} - \alpha^2\theta_x A_{0x}) + i(\theta_{tt} - \alpha^2\theta_{xx})A_0] \\
&\quad + \epsilon^2[(-\theta_t^2 + \alpha^2\theta_x^2 + \beta^2)A_2 + 2i(\theta_t A_{1t} - \alpha^2\theta_x A_{1x}) + i(\theta_{tt} - \alpha^2\theta_{xx})A_1 \\
&\qquad + A_{0tt} - \alpha^2 A_{0xx}]
\end{aligned}$$

オーダー $1, \epsilon, \epsilon^2$ の項に対応している。しかし、(97)式のオーダーリングに従うならば、ϵ への依存性を明示する必要はない。

Nonuniform Media

前節と同様に、より興味があるのは、媒体がゆっくり変化することによって変調が起こる場合である。例えば、初期には一様であった波列が、媒体のパラメータがある長さスケール L にわたってゆっくり変化するような非均質媒体に入っていく場合を考えることができる。λ が典型的な波長（例えば初期の波列における波長）ならば、微小量は $\epsilon = \lambda/L$ である。無次元化変数を用いると、媒体は ϵx の関数によって記述される。そして(103)式が変調する波列の記述に適当な形である。同様な定式化は媒体が時間的にゆっくり変化する場合にも適用できる。

具体例として再び Klein-Gordon 方程式をとりあげる。非均質媒体の場合には、方程式は self-adjoint の形

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha^2(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} + \beta^2(x,t)\varphi = 0 \tag{104}$$

となる。x と t はすでに典型的な波長と周期（通常 α/β と $1/\beta$ の値が用いられる[65]）で無次元化されているものとし、時間的および空間的な変化を含めるため

$$\alpha = \tilde{\alpha}(\epsilon x, \epsilon t), \quad \beta = \tilde{\beta}(\epsilon x, \epsilon t) \tag{105}$$

と表せることを仮定する。前と同様に、 ϵ の依存性を明示的に導入するのではなく、

$$k = \theta_x,\ \omega = -\theta_t,\ A_0,\ \alpha,\ \beta$$

が全て $O(1)$ の量であって、微分の階数あるいは A の添字が一つ増えるとオーダーが一つ増加するものとして、(95)式を直接(104)式に代入する。(104)式は

$$\varphi_{tt} - 2\alpha\alpha_x\varphi_x - \alpha^2\varphi_{xx} + \beta^2\varphi = 0$$

と表され、また(95)式より

$$\varphi_x \sim i\theta_x e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_{nx},$$

$$\varphi_{tt} \sim i\theta_{tt} e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + [i\theta_t]^2 e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + 2i\theta_t e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_{nt} + e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_{ntt},$$

$$\varphi_{xx} \sim i\theta_{xx} e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + [i\theta_x]^2 e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + 2i\theta_x \sum_{n=0}^{\infty} A_{nx} + e^{i\theta(x,t)}\sum_{n=0}^{\infty} A_{nxx}$$

$$+ \cdots = 0$$

したがって $k = \theta_x, \omega = -\theta_t$ とおくと

$$\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta = 0$$

$$2(\omega A_{0t} + \alpha^2 k A_{0x}) + (\omega_t + \alpha^2 k_x)A_0 = 0$$

$$2(\omega A_{1t} + \alpha^2 k A_{1x}) + (\omega_t + \alpha^2 k_x)A_1 = -i(A_{0tt} - \alpha^2 A_{0xx})$$

が得られる。

[65] α は速度の次元をもち、β は振動数の次元をもっている。

であるから

$$[i\theta_t]^2 A_0 - \alpha^2[i\theta_x]^2 A_0 + \beta^2 A_0 = 0,$$
$$i\theta_{tt}A_0 + [i\theta_t]^2 A_1 + 2i\theta_t A_{0t} - 2\alpha\alpha_x(i\theta_x A_0)$$
$$- \alpha^2(i\theta_{xx}A_0 + [i\theta_x]^2 A_1 + 2i\theta_x A_{0x}) + \beta^2 A_1 = 0, \ldots$$

より

$$[i\theta_t]^2 - \alpha^2[i\theta_x]^2 + \beta^2 = 0,$$
$$([i\theta_t]^2 - \alpha^2[i\theta_x]^2 + \beta^2)A_1 + 2i\theta_t A_{0t} - 2i\alpha^2\theta_x A_{0x}$$
$$+ (i\theta_{tt} - 2i\alpha\alpha_x\theta_x - i\alpha^2\theta_{xx})A_0 = 0$$

したがって

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2 = 0 \tag{106}$$
$$2\omega A_{0t} + 2\alpha^2 k A_{0x} + (\omega_t + 2\alpha\alpha_x k + \alpha^2 k_x)A_0 = 0 \tag{107}$$

が得られる。また $\theta_t = -\omega, \theta_x = k$ と置いたので

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{108}$$

なる関係(consistency relation)が成り立つことが必要である。(106)式と(108)式から ω, k, θ を決定する方法は、11.5 節においてもっと直観的な議論に基づいて提案した手順、またその後 11.7 節において変分原理に基づくアプローチから得られたものと全く同様である。そこから得られる結果については既に 11.5 節において調べた。特に、k の値は(106)式から得られる群速度 $\partial\omega/\partial k$ によって伝播するが、群速度も k の値も群速度に沿った特性曲線上で必ずしも定数となるわけではないことに注意する。

この例の場合、群速度は $\alpha^2 k/\omega$ と表される [66]。したがって、(107)式の特性曲線はこの群速度に沿った方向であり、原理的にはこの特性曲線に沿って積分することにより A_0 の値を得ることができる。しかし、最も注意すべき点は、(107)式が保存形で

$$\left(\frac{1}{2}\omega A_0 A_0^*\right)_t + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 k A_0 A_0^*\right)_x = 0 \tag{109}$$

と表せる [67] ことである。すなわち、波の作用の方程式:(102)式は α と分散関係が x と t に依存するような非均質の場合でも変わらずに成り立つ。これは変分原理によるアプローチにおいて要求したものを具現化したものである。

実際、平均エネルギー密度と平均エネルギー流束を(53)式と(54)式：

---

[66] (106)式より $\omega = \pm\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}$ であるから $\partial\omega/\partial k = \alpha^2 k/\omega$ である。

[67] 実際、(107)式の複素共役をとると

$$2\omega A_{0t}^* + 2\alpha^2 k A_{0x}^* + (\omega_t + 2\alpha\alpha_x k + \alpha^2 k_x)A_0^* = 0$$

であるから、これに A_0 を掛けたものと(107)式に A_0^* を掛けたものとの和をとると

$$\begin{aligned}
&2\omega(A_{0t}^* A_0 + A_{0t}A_0^*) + 2\alpha^2 k(A_{0x}^* A_0 + A_{0x}A_0^*) + (\omega_t + 2\alpha\alpha_x k + \alpha^2 k_x)(A_0^* A_0 + A_0 A_0^*)\\
&\quad = 2\omega(A_0A_0^*)_t + 2\alpha^2 k(A_0A_0^*)_x + 2[\omega_t + (\alpha^2 k)_x](A_0A_0^*)\\
&\quad = 2[\omega(A_0A_0^*)_t + \omega_t(A_0A_0^*)] + 2[\alpha^2 k(A_0A_0^*)_x + (\alpha^2 k)_x(A_0A_0^*)]\\
&\quad = 2(\omega A_0A_0^*)_t + 2(\alpha^2 k A_0A_0^*)_x = 0
\end{aligned}$$

が得られる。

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}a^2(\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2),$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \omega k$$

で表されるものとし

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$$

を(106)式～(108)式より計算すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4}(\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2)A_0 A_0^*\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\alpha^2 \omega k A_0 A_0^*\right\} = \frac{1}{4}\left\{k^2 \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \frac{\partial \beta^2}{\partial t}\right\} A_0 A_0^* \tag{110}$$

が得られる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2)a^2$$

であったから、これは(94)式に一致する[68]。

(95)式を方程式に直接用いることによって、要求された結果が得られた。しかし、変分原理によるアプローチのときのような一般性はなく、優れた洞察も得ることはできなかった。この二つのアプローチは１４章の議論において結合される。今までのところ、まず理論の応用を考え、そして特定の問題においてアイデアを拡大することになる。

---

[68] 波の作用の方程式：(109)式が成り立つことから

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial x} = 0$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\omega \mathcal{L}_k) = \omega\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial x}\right) + \mathcal{L}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} - \mathcal{L}_k \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$
$$= \mathcal{L}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{L}_k \frac{\partial k}{\partial t} - \left(\mathcal{L}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{L}_k \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{L}_a \frac{\partial a}{\partial t} + \mathcal{L}_t\right) = -\mathcal{L}_t$$

が成り立つ。