

# 熱対流問題におけるパターン形成

西田 孝明 (早稲田大学・基幹理工学部)

## 1 定式化

粘性・熱伝導性・圧縮性を考慮した一般の流体運動の方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^i u^j + p \delta^{ij})}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu' \left( \frac{\partial u^k}{\partial x_k} \right) \right\} + \rho f_i, \\ & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u^j + p u^j)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} + \mu u^k \left( \frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_k} \right) + \mu' u^j \left( \frac{\partial u^k}{\partial x_k} \right) \right\} \\ & + \rho u_i f_i, \end{aligned}$$

ここで  $E = e + |u|^2/2$  で、 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$  は速度、圧力  $p$  と内部エネルギー  $e$  は密度  $\rho$  と温度  $T$  の関数であり、粘性、熱伝導性を考慮しており、 $f$  は外力である。

この方程式系に対する初期値・境界値問題は、一般の初期値に対して時間局所的に解の存在と一意性として解かれている。さらに、定数状態からのずれが小さい初期値のときには、時間大域的にも解かれ、時間とともにその定数状態への減衰あるいは漸近挙動が知られている。定常境界値問題も外力が小さいときには、定常解の存在と一意性が知られている。しかしながら、これらの小ささを仮定しないときには、ほとんど解明されていない。

例えば、この方程式系に対する熱対流問題のうちの最も簡単な次の境界値問題を考える。問題の領域は、水平な帯状領域  $\{x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 0 < z < d\}$  とし、境界条件として、速度については stress free あるいは fixed を仮定し、温度に関しては領域の底の面では  $T = T_0$  を、上の面では  $T = T_1$  を与える。外力としては垂直下向きに重力のみが働くとする。このとき、任意の  $\Delta T = T_0 - T_1 > 0$  に対して平衡解（熱伝導解）が存在する。従って、この熱伝導解について温度差を大きくしていく時のその安定性、不安定性を調べることは、平衡解の小さい近傍の問題であるが、物理的パラメータが大きくなり上記の解析的に知られている状況から離れて行くことになる。その温度差が臨界値を越すとその熱伝導解は不安定化し、まず定常分岐を起こしていると考えられるが、質量保存則の非線形性が強くいまだ解析できていない。このようにこの方程式系に対する温度の考慮も必要な問題の数学的取扱いは、極めて少ない。

そこで、熱対流問題の解析によく用いられるのは、この系を近似していると考えられている（即ち、この近似がどういう正当性を持つかは、数学的には分かっていない。）Oberbeck-Boussinesq 方程式であり、それを無次元化した系は、速度、圧力、温度について次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{P}_r} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p &= \Delta \vec{u} - \rho(T) \nabla z , \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 , \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T &= \Delta T .\end{aligned}$$

ここで流体の圧縮性は、Oberbeck-Boussinesq 近似として密度の温度依存が、

$$\rho(T) = \mathcal{G} - \mathcal{R}_a T$$

の形で重力・浮力の項にのみ仮定されており、 $\mathcal{P}_r = \mu/\kappa$  は Prandtl 数、 $\mathcal{R}_a$  は Rayleigh 数であり、これらが主たる分岐パラメーターとなる。殊に、 $\mathcal{R}_a = 0$  の時には、Navier-Stokes 方程式である。

考える領域は、水平な帯状領域  $\{x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 0 < z < 1\}$  とし、境界条件として、温度に関しては領域の底の面では  $T = 1$  を、上の面では  $T = 0$  を考える。

このときすべてのパラメータ領域：  $\mathcal{P}_r > 0, \mathcal{R}_a > 0$  において、

$$\vec{u} = 0, \quad T = 1 - z, \quad \rho = \mathcal{G} - \mathcal{R}_a(1 - z),$$
$$p = \mathcal{G}(1 - z) - \mathcal{R}_a\left(\frac{1}{2} - z + \frac{z^2}{2}\right) + p_a$$

により与えられる熱伝導解が、平衡状態である。

この平衡状態からの分岐問題を考えることが目的である。

この時、平衡状態からの摂動が満たすべき方程式系は次である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{P}_r} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p &= \Delta \vec{u} + \mathcal{R}_a \theta \nabla z, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta &= \Delta \theta + w.\end{aligned}$$

帯状領域の水平方向  $x, y$  は、周期境界条件を仮定する:

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}, \quad 0 \leq y \leq \frac{2\pi}{b}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

上下の境界条件は、一番簡単なのが Rayleigh に従ったもので、速度については stress free boundary condition の場合である。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{on } z = 0, 1.$$

より物理的に自然なのは、上面では stress free boundary condition を、下面では fixed BC である：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{on } z = 1, \\ u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{on } z = 0. \end{aligned}$$

更に Bénard-Marangoni 問題では上面は自由表面で表面張力が温度に依存し、底面は固定境界条件である：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_3 - \vec{u}_h \cdot \nabla_h \eta \Big|_{z=\eta(t,x,y)} .$$

$$\left( (p - p_{\text{air}})I - (\nabla \vec{u} + \nabla^t \vec{u}) \right) \cdot \vec{n} = \sigma 2H \vec{n} + (\vec{\tau} \cdot \nabla) \sigma \vec{\tau} ,$$

$$\vec{n} \cdot \nabla T + \mathcal{B}_i T = -1 \quad \text{on} \quad z = \eta(t, x, y) .$$

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \mathcal{C}_a - \mathcal{M}_a T , \\ 2H &= \nabla_h \left( \frac{\nabla_h \eta}{\sqrt{1 + |\nabla_h \eta|^2}} \right) . \end{aligned}$$

はじめに、最も簡単な境界条件である、速度について stress free を仮定し、摂動は水平方向に周期的であって、更に、固有値の単純性を保証するために、次の偶関数・奇関数性を仮定する。

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -u(-x, y, z) = u(x, -y, z) , \\v(x, y, z) &= v(-x, y, z) = -v(x, -y, z) , \\w(x, y, z) &= w(-x, y, z) = w(x, -y, z) , \\\theta(x, y, z) &= \theta(-x, y, z) = \theta(x, -y, z) , \\p(x, y, z) &= p(-x, y, z) = p(x, -y, z) .\end{aligned}$$

この時、解は Fourier 級数展開でき、例えば速度、温度は次の表示を持つ。

$$\begin{aligned}u(t, x, y, z) &= \sum_{l,m,n} u_{lmn}(t) \sin alx \cos bmy \cos n\pi z , \\\theta(t, x, y, z) &= \sum_{l,m,n} \theta_{lmn}(t) \cos alx \cos bmy \sin n\pi z .\end{aligned}$$

他の未知量も類似の表示式を持つ。

解を考える関数空間は、次の Hilbert 空間である。

$$L_{a,b}^2 = \{u, v, w, \theta, p \mid \sum_{l,m,n} (u_{lmn}^2 + v_{lmn}^2 + w_{lmn}^2 + \theta_{lmn}^2 + p_{lmn}^2) < \infty \}$$
$$H_{a,b}^2 = \{u, v, w, \theta, p \mid \sum_{l,m,n} \{((al)^2 + (bm)^2 + (n\pi)^2)^2 (u_{lmn}^2 + v_{lmn}^2 + w_{lmn}^2 + \theta_{lmn}^2) + ((al)^2 + (bm)^2 + (n\pi)^2) p_{lmn}^2\} < \infty \}$$

## 2 Oberbeck-Boussinesq 方程式の分岐問題

まず方程式系を線形化してその固有値固有関数を調べる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{P}_r} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p &= \Delta \vec{u} + \mathcal{R}_a \theta \nabla z, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + w.\end{aligned}$$

線形系は、自己共役で実の固有値のみを持つ。即ち、固有関数は次の形であって

$$\theta(t, x, y, z) = \sum_{l, m, n} \theta_{lmn} e^{\lambda t} \cos alx \cos bmy \sin n\pi z,$$

$\lambda$  に関する固有値問題が得られる。

$$\lambda \frac{1}{\mathcal{P}_r} \vec{u} = \Delta \vec{u} - \nabla p + \mathcal{R}_a \theta \nabla z ,$$

$$\lambda \theta = \Delta \theta + w ,$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 .$$

$$\hat{u}(\lambda, x, y, z) = \sum_{l,m,n} \hat{u}_{lmn}(\lambda) \sin alx \cos bmy \cos n\pi z ,$$

$$\hat{\theta}(\lambda, x, y, z) = \sum_{l,m,n} \hat{\theta}_{lmn}(\lambda) \cos alx \cos bmy \sin n\pi z .$$

その系は陽に解けて、各  $l, m, n$  に対して次の固有値が得られる。

$$\lambda_3 = -\mathcal{P}_r A^2,$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ -(1 + \mathcal{P}_r) A^2 \pm \sqrt{(1 + \mathcal{P}_r)^2 A^4 + 4 \mathcal{P}_r \frac{(a^2 l^2 + b^2 m^2) \mathcal{R}_a - A^6}{A^2}} \right\},$$

ここで

$$A^2 = (al)^2 + (bm)^2 + (n\pi)^2.$$

各モード  $(l, m, n)$  について、 $\lambda_3$  と  $\lambda_-$  は常に負であるが、

$$\mathcal{R}_a = \frac{A^6}{(a^2 l^2 + b^2 m^2)}$$

の時に  $\lambda_+$  は、符号を変える。

従って、 $(a, b)$  を固定した時に臨界 Rayleigh 数は、

$$\mathcal{R}_c = \inf_{l, m, n} \frac{(a^2 l^2 + b^2 m^2 + (n \pi)^2)^3}{(a^2 l^2 + b^2 m^2)} \geq 6.75 \times \pi^4$$

である。即ち、固定した  $a$  と  $b$  の値に対して、Rayleigh 数を増大してゆくときに、その最大固有値が零を横切る臨界 Rayleigh 数に達した時に、それが、単純固有値であれば、通常の設定分岐理論が適用でき、その臨界 Rayleigh 数から定常分岐が起っていることがわかる。

最小の臨界 Rayleigh 数は、

$$\mathcal{R}_c = 6.75 \times \pi^4$$

である。これは例えば、

$a = \pi/\sqrt{2}$ ,  $b = 0$  の時には  $(l, m, n) = (1, 0, 1)$  あるいは

$a = \pi/2\sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{3}a$  の時には  $(l, m, n) = (2, 0, 1)$ ,  $(l, m, n) = (1, 1, 1)$

等で達成される。

この臨界 Rayleigh 数は、元の系の熱伝導解の線形安定性・不安定性の境を示すが、Joseph ([10] 1965) は、エネルギー法と変分法を用いて、臨界 Rayleigh 数以下では、大域的にも熱伝導解の非線形安定性が、成り立つことを示した。従って、この定常分岐では、Rayleigh 数が増大する方に分岐曲線が出ていることもわかる。

$$w = \vec{u}_3, \quad \tilde{\theta} = \sqrt{\mathcal{R}_a} \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int \left( \frac{|\vec{u}|^2}{\mathcal{P}_r} + \tilde{\theta}^2 \right) dx dy dz + \int \left( |\nabla \vec{u}|^2 + |\nabla \tilde{\theta}|^2 \right) dx dy dz \\ = 2\sqrt{\mathcal{R}_a} \int (w \tilde{\theta}) dx dy dz, \\ \leq \int \left( \mathcal{R}_a |\nabla^{-1} w|^2 + |\nabla \tilde{\theta}|^2 \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

## 単純定常分岐定理

$X, Y$  をバナッハ空間とし、 $\mathcal{F}(u, \mu)$  は、 $X \times R$  の原点近傍から  $Y$  への二回連続的微分可能な写像で、 $\mathcal{F}(0, \mu) = 0$  とし、次を仮定する。

- (i)  $\mathcal{N}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$  は一次元で、 $u_0$  で張られる。
- (ii)  $\mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$  の補空間は、一次元である。
- (iii)  $D_{u, \mu} \mathcal{F}(0, 0) u_0 \notin \mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$  とする。

この時、

$\mathcal{F}(u, \mu) = 0$  の解は、 $(0, 0)$  近傍では  $\{(0, \mu)\} \cup \{(u(s), \mu(s))\}$

からなる。

ここで、 $-s_0 < s < s_0$  に対して、 $u(s) = su_0 + s\varphi(s)$  で、 $\varphi(s), \mu(s)$  は、一回連続的微分可能であり、 $\varphi(s) \in \mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$  かつ  $\varphi(0) = 0, \mu(0) = 0$  である。

この分岐によって現れる解の安定性に関する定理もある。( [4] ) 更に、臨界固有値が、 $0$  ではなく、純虚数のときの周期解が現れる Hopf 分岐の定理 ( [5] ) もある。

$\mathcal{F}(U, \mu)$  は、 $H^2(a, b) \times R$  から  $L^2(a, b)$  への二回連続的微分可能な写像：  
 $U = (\vec{u}, \theta, p) \times \mu$  から

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} - \nabla p + \mathcal{R}_c \theta \nabla z + \mu \theta \nabla z - \frac{1}{\mathcal{P}_r} (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}), \\ \Delta \theta + w - \vec{u} \cdot \nabla \theta, \\ \nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

$D_u \mathcal{F}(0, 0)$  :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} - \nabla p + \mathcal{R}_c \theta \nabla z, \\ \Delta \theta + w, \\ \nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$  :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} - \nabla p + \mathcal{R}_c \theta \nabla z = 0, \\ \Delta \theta + w = 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

## 単純定常分岐安定性定理

### 定義

$T, K \in \mathcal{L}(X, Y)$  とした時、 $\mu \in R$  が作用素  $T$  の  $K$ -単純固有値であるとは、

$$(i) \quad \dim \mathcal{N}(T - \mu K) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(T - \mu K) = 1$$

であって、 $\mathcal{N}(T - \mu K) = \operatorname{span}\{u_0\}$  としたとき

$$(ii) \quad K u_0 \notin \mathcal{R}(T - \mu K).$$

### 補題

$K \in \mathcal{L}(X, Y)$  として、 $0$  は、 $T = D_u \mathcal{F}(0, 0)$  の  $K$ -単純固有値とする。

その時  $0$  を含む開区間  $I, J$  と連続的微分可能な関数

$\lambda : I \mapsto R, \quad \mu : J \mapsto R, \quad u : I \mapsto X, \quad w : J \mapsto X$  が存在して次をみたす。

$$(i) \quad D_u \mathcal{F}(0, \gamma) u(\gamma) = \lambda(\gamma) K u(\gamma), \quad \gamma \in I$$

$$(ii) \quad D_u \mathcal{F}(u(s), \gamma(s)) w(s) = \mu(s) K w(s), \quad s \in J.$$

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0, \quad u(0) = u_0 = w(0), \quad u(\gamma) - u_0 \in Z, \quad w(s) - u_0 \in Z.$$

## 定理

$$\frac{d\lambda}{d\gamma}(0) \neq 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0, \mu(s) \neq 0} \frac{-s \frac{d\gamma}{ds}(s) \frac{d\lambda}{d\gamma}(0)}{\mu(s)} = 1,$$

$$\left\| \frac{du(s)}{ds} - w(s) \right\| \leq C \min\left\{ \left| s \frac{d\gamma}{ds}(s) \right|, |\mu(s)| \right\}, \quad s \in J$$

## Hopf 分岐定理

$$\frac{du}{dt} = Lu + f(u, \gamma)$$

### (HL) 線形部分

$U$  をバナッハ空間、 $\mathcal{D}(L) \subset U$  とし、線形作用素  $L$  は  $\mathcal{D}(L) \mapsto U$  の楔型で解析半群を生成し、コンパクトなレゾルVENT を持つとする。

- (i)  $i$  は作用素  $L$  の単純固有値で、
- (ii)  $ni \notin \sigma(L)$ ,  $n = 0, 2, 3, \dots$ .

### (HN) 非線形部分

$f(u, \gamma)$  は、 $V = \mathcal{D}((-L)^\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1)$  として、 $V \times R$  の原点近傍から  $U$  へ二回連続的微分可能で、 $f(0, \gamma) = 0$ ,  $D_u f(0, 0) = 0$  とする。

固有値  $i$  は、 $I$ -単純固有値だから、 $|\gamma|$  が小さければ、連続的微分可能な  $u(\gamma)$ ,  $\lambda(\gamma)$  が存在し、 $u(0) = u_0$ ,  $\lambda(0) = i$  であって、次が成立する。

$$(L + D_u f(0, \gamma)) u(\gamma) = \lambda(\gamma) u(\gamma).$$

(HH)

$$\operatorname{Re} e \frac{d\lambda}{d\gamma} \neq 0.$$

定理

(HL) (HN) (HH) を仮定する。この時、 $\exists s_0 > 0$  と連続的微分可能な関数

$$(\rho, \gamma, u) : (-s_0, s_0) \mapsto R \times R \times \mathcal{C}(R; V)$$

が存在して、

$(u(s), \gamma(s))$  は、 $2\pi\rho$  周期の周期解である。

### 3 ロール型、長方形型、六角形型の解

パターン形成を明瞭に見るために、 $a = \pi/2\sqrt{2}$  と取り aspect 比を  $b/a = \sqrt{3}$  と選ぶと、臨界 Rayleigh 数は、 $\mathcal{R}_c = 6.75 \times \pi^4$  であるが、その時の最大固有値  $\lambda = 0$  は、2次元の固有空間を持っている。一つの固有関数はロール型の解であり、他の固有関数は長方形型の解であり、それらのある一次結合は、六角形型の解を与える。

ロール型の解は、モードが  $(l, m, n) = (2, 0, 1)$  に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{201} \cos(2ax) \sin(\pi z) .$$

である。他の未知関数も類似の表示を持つ。

長方形型の解は、モードが  $(l, m, n) = (1, 1, 1)$  に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{111} \cos(ax) \cos(\sqrt{3}ay) \sin(\pi z) .$$

である。

六角形型の解は、モードがそれらの一次結合に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{hex} \{ 2 \cos(ax) \cos(\sqrt{3}ay) + \cos(2ax) \} \sin(\pi z) .$$

この場合には、固有空間が2次元であり単純分岐定理を直接適用することはできない。しかしながら、元の関数空間  $H_{a,\sqrt{3}a}^2$  をロールが現れる部分空間  $H_{roll}^2$  に制限して、単純分岐定理を適用することができる。即ち、例えば温度に関しては、次の表示ができる部分空間とする。

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=even}^{\infty} \theta_{l,0,n} \cos(alx) \sin(n\pi z).$$

これには、長方形型や六角形型の固有関数は含まれず、固有値  $\lambda = 0$  は、 $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c = 6.75 \times \pi^4$  で単純となり、定常分岐定理が適用できて、この点から、 $\mathcal{R}_a > \mathcal{R}_c$  の方向にロール型の分岐解が得られる。

同様に長方形型の解を得るには、関数空間  $H_{a,\sqrt{3}a}^2$  を部分空間  $H_{rect}^2$  に次のように制限する。

$$\begin{aligned} \theta = & \sum_{n=odd}^{\infty} \sum_{l+m=even, l,m=odd}^{\infty} \theta_{l,m,n} \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \sin(n\pi z) \\ & + \sum_{n=even}^{\infty} \sum_{l+m=even, l,m=even}^{\infty} \theta_{l,m,n} \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \sin(n\pi z) . \end{aligned}$$

この部分空間では、同じく、長方形型の分岐解が得られる。

六角形型の解は、 $x-y$  平面上  $2\pi/3$  の回転不変性を持つから、部分空間  $H_{hexa}^2$  を次のように定める。

$$\begin{aligned} \theta = & \sum_{l,m,n}^{\infty} \sum_{l+m=even}^{\infty} \theta_{l,m,n} \left\{ \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \right. \\ & + \cos\left(a\left(\frac{l-3m}{2}\right)x\right) \cos\left(\sqrt{3}a\left(\frac{l+m}{2}\right)y\right) \\ & \left. + \cos\left(a\left(\frac{l+3m}{2}\right)x\right) \cos\left(\sqrt{3}a\left(\frac{l-m}{2}\right)y\right) \right\} \sin(n\pi z) . \end{aligned}$$

この部分空間では、六角形型の分岐解が得られる。

ここで、これらの三つの分岐解は、同じ臨界 Rayleigh 数  $\mathcal{R}_c = 6.75 \times \pi^4$  で零解からそれぞれに分岐し、その分岐曲線は、Joseph の上述の定理によって  $\mathcal{R}_a > \mathcal{R}_c$  の方向に独立に出ており、しかもそれぞれの部分空間では安定に出ていることが分かる。(cf. [4]) 以上古典的な結果である。

しかしながら、多重固有値からの分岐であり、元の空間  $H_{a,\sqrt{3}a}^2$  でのそれらの安定性は分からない。それらを調べる方法の一つとして、中心多様体の理論があるが、ここでは省略する。

## 4 Stress Free Upper Boundary and Fixed Bottom Boundary

上面が stress free で 底で fixed の境界条件の場合に通常の間常分岐定理を適用する。そのためには、線形化方程式系を考え間常分岐がおこる、即ち  $\lambda = 0$  を与える臨界 Rayleigh 数を求めなければならない。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathcal{P}_r \nabla p &= \mathcal{P}_r \Delta \vec{u} + \mathcal{P}_r \mathcal{R}_a \theta \nabla z, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + w,\end{aligned}$$

ここで

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}, \quad 0 \leq y \leq \frac{2\pi}{b}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{on } z = 1, \\ u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{on } z = 0.\end{aligned}$$

取扱いが簡単になるように摂動は、水平方向に次の偶関数性あるいは奇関数性を仮定する。

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -u(-x, y, z) = u(x, -y, z) , \\v(x, y, z) &= v(-x, y, z) = -v(x, -y, z) , \\w(x, y, z) &= w(-x, y, z) = w(x, -y, z) , \\\theta(x, y, z) &= \theta(-x, y, z) = \theta(x, -y, z) , \\p(x, y, z) &= p(-x, y, z) = p(x, -y, z) .\end{aligned}$$

その時、速度の第一成分と温度は、次の展開を持つ。

$$\begin{aligned}u(t, x, y, z) &= \sum_{l,m} u_{lm}(t, z) \sin alx \cos bmy . \\ \theta(t, x, y, z) &= \sum_{l,m} \theta_{lm}(t, z) \cos alx \cos bmy .\end{aligned}$$

他の未知関数も同様の展開を持つ。

そうすると、固有値問題として各モード  $(l, m)$  を固定して、変数  $z$  に関する常微分方程式系を得る。

$$\lambda u_{l,m} - \mathcal{P}_r a l p_{l,m} = \mathcal{P}_r \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (a^2 l^2 + b^2 m^2) \right\} u_{l,m} ,$$

$$\lambda v_{l,m} - \mathcal{P}_r b m p_{l,m} = \mathcal{P}_r \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (a^2 l^2 + b^2 m^2) \right\} v_{l,m} ,$$

$$\lambda w_{l,m} + \mathcal{P}_r \frac{d}{dz} p_{l,m} = \mathcal{P}_r \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (a^2 l^2 + b^2 m^2) \right\} w_{l,m} + \mathcal{P}_r \mathcal{R}_a \theta_{l,m} ,$$

$$\lambda \theta_{l,m} = \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (a^2 l^2 + b^2 m^2) \right\} \theta_{l,m} + w_{l,m} ,$$

$$a l u_{lm} + b m v_{lm} + \frac{d}{dz} w_{lm} = 0 .$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = w = \theta = 0 , \quad \text{on } z = 1 ,$$

$$u = v = w = \theta = 0 , \quad \text{on } z = 0 .$$

この系は、陽には解けないので、数値計算が必要になる。

各モード  $(l, m)$  を固定して、臨界 Rayleigh 数を得るために、 $-0.5 \leq z \leq 0.5$  について Chebyshev 多項式展開を使う。

$$w_{l,m}(\lambda, z) = \sum_n w_{l,m,n}(\lambda) T_n(2z) .$$

実部が最大の固有値  $\lambda$  が虚軸を横切るときの Rayleigh 数を数値的に求めると、

臨界 Rayleigh 数 :

$$\tilde{a} = 0.42685 \dots > \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35355 \dots ,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_c = 1100.6 \dots > 6.75 \times \pi^4 = 657.51 \dots .$$

この不等式の右辺の値は、上下とも stress free の境界条件の時の値である。

臨界 Rayleigh 数  $\tilde{\mathcal{R}}_c = 1100.6 \dots$  ,  $\lambda = 0$  に対応する第一固有関数である。

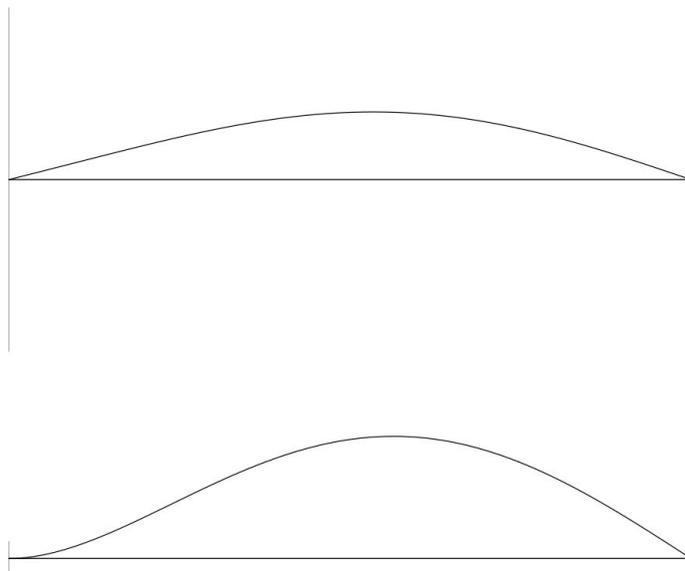


図 1: Eigenfunctions of  $\theta$  and  $w$

$$w = \frac{dw}{dz} = \theta = 0 \quad \text{on } z = 0, \quad w = \frac{d^2w}{dz^2} = \theta = 0 \quad \text{on } z = 1.$$

## 5 ロール型、六角形型、混合型 の解

流体の下の境界をなす平面上での速度の境界条件をもっと物理的に自然な、固定境界条件に変えると、自明解の周りでの線形化方程式の固有値問題も、陽的には解けなくなる。解の展開には、次の様に  $-1/2 \leq z \leq 1/2$  として、例えば Chebyshev の多項式が必要になる。

$$w(t, x, y, z) = \sum_{l, m, n} w_{lmn}(t) \cos(\tilde{a}lx) \cos(\tilde{b}my) T_n(2z) .$$

従って、前述のように、臨界 Rayleigh 数を陽に求めて、そこで分岐が起っていることを単純定常分岐定理を用いて解析的に証明することは、現在出来ない。

この展開を用いて、線形化方程式の固有値問題を有限次元で近似して計算機で求めると、前節の周期境界条件に対応する  $x, y$  方向の周期領域は、 $0 \leq x \leq 2\pi/\tilde{a}$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi/\tilde{b}$ ,  $\tilde{b} = \sqrt{3}\tilde{a}$  として、臨界 Rayleigh 数は、

$$\mathcal{R}_c = 1100.6 \dots, \quad \tilde{a} = 1.341 \dots,$$

となり、前の境界条件の時の臨界 Rayleigh 数  $\mathcal{R}_0$  及び周期領域の係数  $a_0$  は、 $z$  方向を 1 に無次元化すると、夫々、次であった。

$$\mathcal{R}_0 = 6.75 \times \pi^4 = 657.5 \dots, \quad a_0 = \pi/2\sqrt{2} = 1.1107 \dots.$$

ロール型の解は、部分空間  $H_{roll}^2 \subset\subset H_{\tilde{a}, \sqrt{3}\tilde{a}}^2$  として、例えば次の展開を持つ。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=even}^{\infty} w_{l,0,n} \cos(\tilde{a}lx) T_n(2z) .$$

同じく、六角形型の解の部分空間  $H_{hexa}^2 \subset\subset H_{\tilde{a}, \sqrt{3}\tilde{a}}^2$  は、例えば次の展開を持つ。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{l,m,n}^{\infty} \sum_{l+m=even}^{\infty} w_{l,m,n} \left\{ \cos(\tilde{a}lx) \cos(\sqrt{3}\tilde{a}my) \right. \\ & + \cos\left(\tilde{a}\left(\frac{l-3m}{2}\right)x\right) \cos\left(\sqrt{3}\tilde{a}\left(\frac{l+m}{2}\right)y\right) \\ & \left. + \cos\left(\tilde{a}\left(\frac{l+3m}{2}\right)x\right) \cos\left(\sqrt{3}\tilde{a}\left(\frac{l-m}{2}\right)y\right) \right\} T_n(2z) . \end{aligned}$$

これらの部分空間で、固有値等の計算を保証して、単純分岐定理を用いて分岐点近傍での解の存在（パターン形成）が得られる。

大域的にロール型の解を追跡するには、例えば速度の垂直成分に関しては、次の展開を用いて Newton 法を利用する事になる。

$$w(t, x, z) = \sum_{l,n}^{L,N} w_{lmn}(t) \cos(\tilde{a}lx) T_n(2z), \quad w(t, x, z) = 0, \quad z = \pm 1/2.$$

即ち、定常解の偏微分方程式系は無次元の問題であるが、それを有限次元の問題で近似する。未知関数  $\{u, v, w, \theta, p\}$  に関する方程式は、第一節の級数展開によって、

$$\{ u_{l,m,n}, v_{l,m,n}, w_{l,m,n}, \theta_{l,m,n}, p_{l,m,n} \}$$

に関する無限連立の二次方程式系であるが、これを有限個の

$$\{ u_{l,m,n}, v_{l,m,n}, w_{l,m,n}, \theta_{l,m,n}, p_{l,m,n}, \quad l + m + n \leq N \}$$

に関する有限連立二次方程式として Galerkin 近似する。

これは、 $U$  でその有限個の未知量を表すとその方程式は、

$$F(U; \mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r) = 0$$

の形に書ける。これを  $\mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r$  を固定して、次のニュートン法で解く。

$$U_{k+1} = U_k - DF(U_k)^{-1} F(U_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ここで、 $DF$  は、 $F$  の  $u$  に関する Fréchet 微分で、初期値  $U_0$  は、適当に与える。

## ロール型の解

図2は、 $\mathcal{R}_a = 2 \times \mathcal{R}_c$  と  $\mathcal{R}_a = 10 \times \mathcal{R}_c$  の時のロール型の解の温度の等温線の断面図である。流体は、解の中心あたりで上昇している。

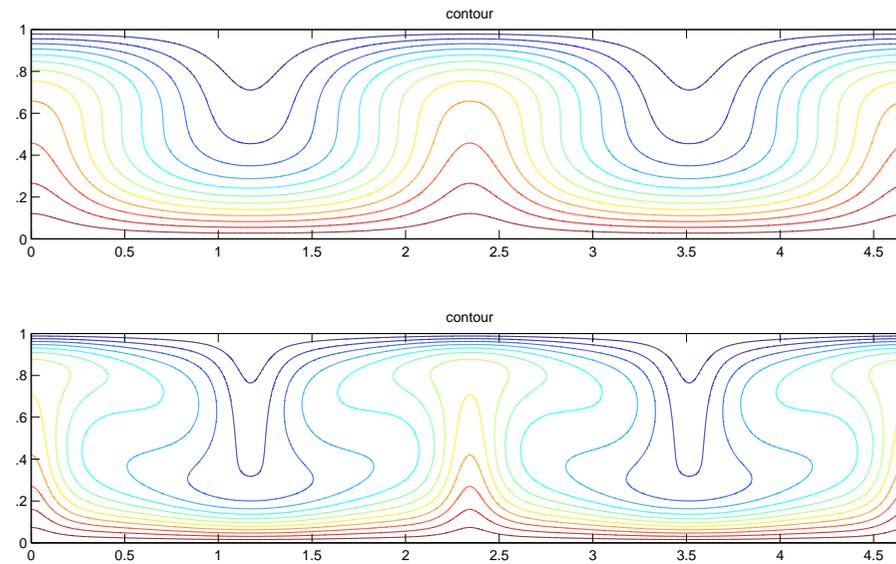


図 2: The isothermal line on the cross section  $y = \text{constant}$

## ロール型の解の分岐曲線

横軸は、正規化した Rayleigh 数  $r = \mathcal{R}_a/\mathcal{R}_c$  であり、縦軸は、解の展開における係数  $u_{2,0,1}$  である。

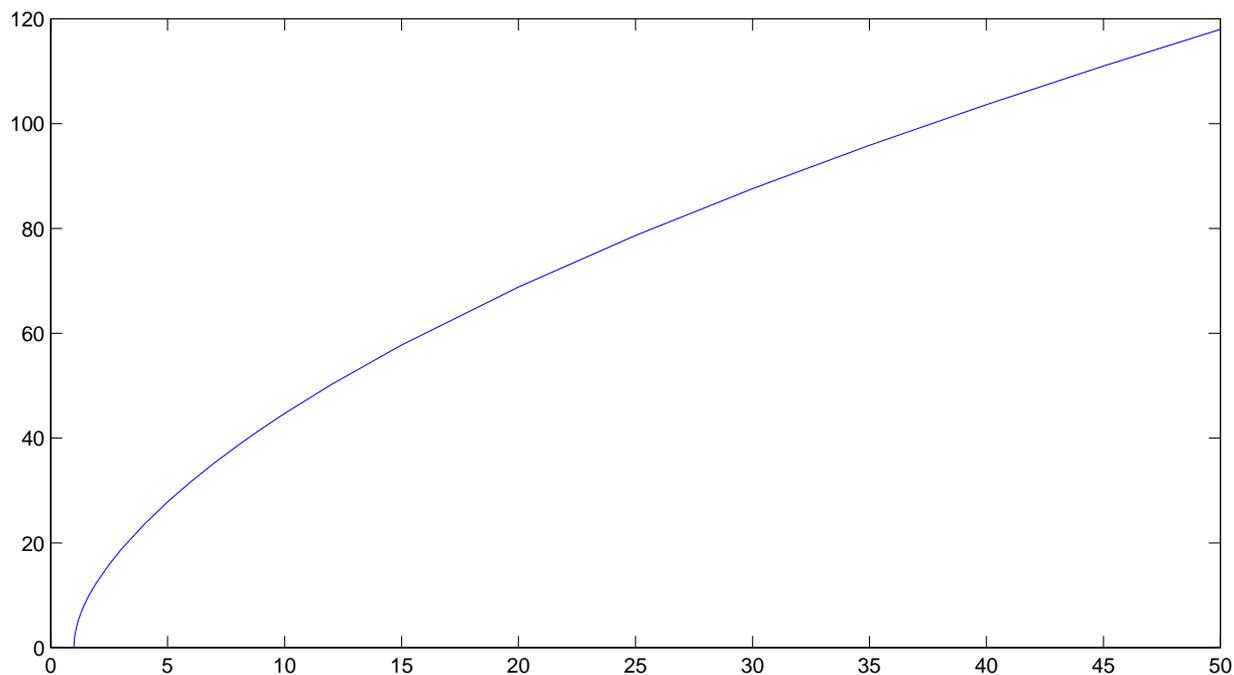


図 3: The bifurcation curve of roll type solutions for  $1.0 \leq r = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_c} \leq 50.0$

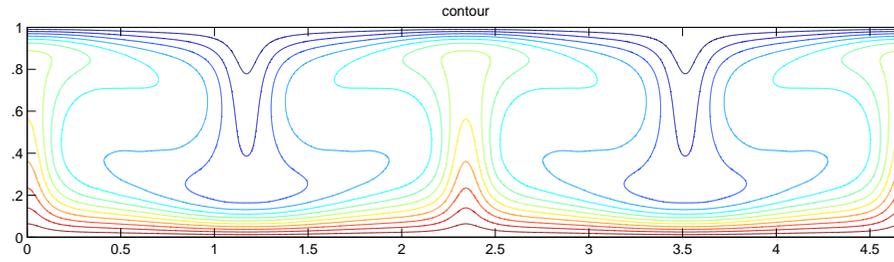


図 4:  $\mathcal{R}_a = 20 \times \mathcal{R}_c$  の時の  $y = const.$  断面での等温線

## 六角形型の解

図 8 は、 $\mathcal{R}_a = 1.5 \times \mathcal{R}_c$  の時の六角形型の解の温度の中間の水平面  $z = 0$  における等温線である。左の六角形型の解の中心付近では、流体が沈み、右側の解では、流体が上昇している。

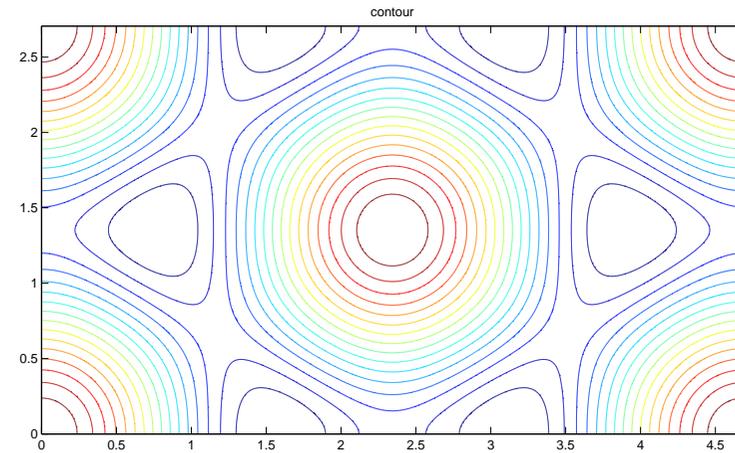
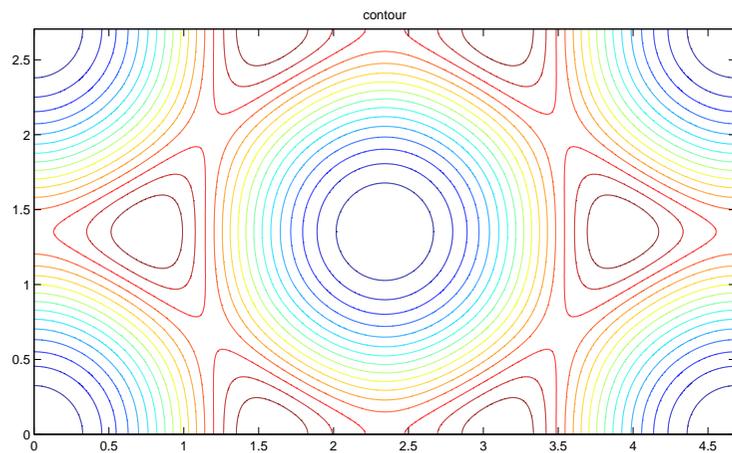


図 5: 中間の水平面  $z = 0$  における温度の等温線である。

## 混合型の解

長方形型と六角形型の混合型の解：左の解は、 $\mathcal{R}_a = 1.1 \times \mathcal{R}_c$  の時で、右の解は、 $\mathcal{R}_a = 1.6 \times \mathcal{R}_c$  の時の解の温度の平面  $z = 0$  における等温線であり、中心付近で流体が沈んでいる。

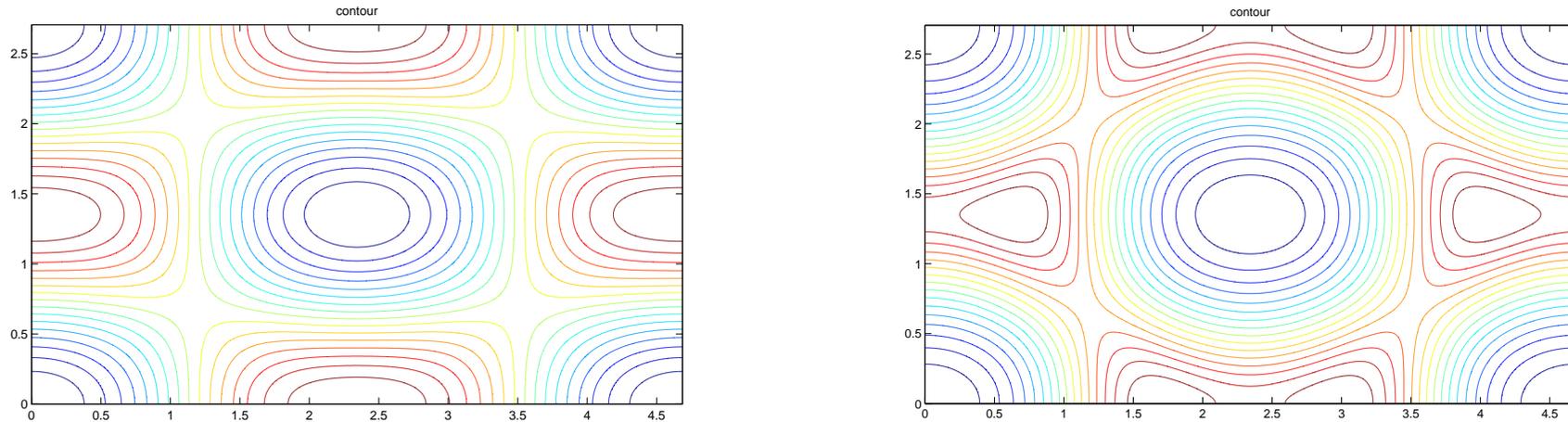


図 6: 中間の水平面  $z = 0$  における温度の等温線である。

これらの混合型の解は、分岐点  $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c$  から分岐しており、そこでの固有関数は、長方形型であった。

中心付近で沈んでいるこれらの六角形型と混合型の解の分岐曲線は、次で与えられる。

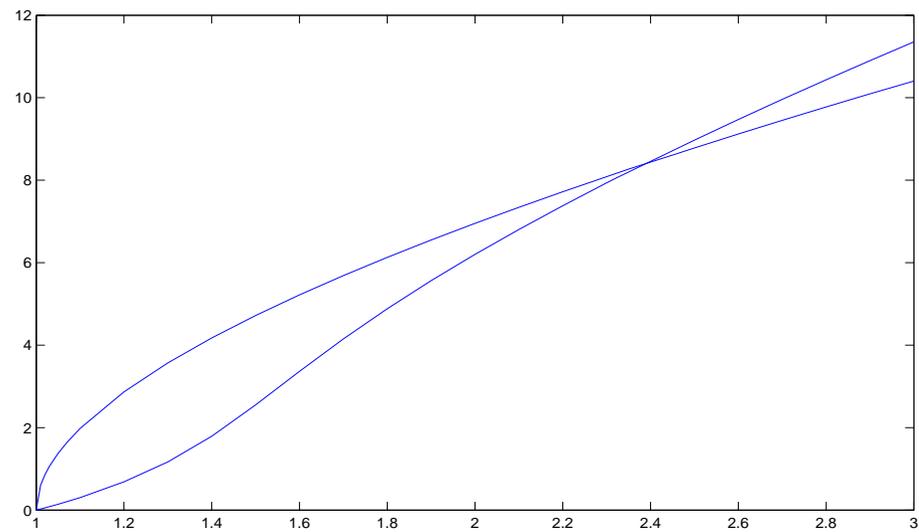


図 7:  $1.0 \leq r = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_c} \leq 3.0$  における六角形型と混合型の分岐曲線

分岐曲線が、交差した後の  $\mathcal{R}_a = 3 \times \mathcal{R}_c$  における混合型と六角形型の解の等温線。

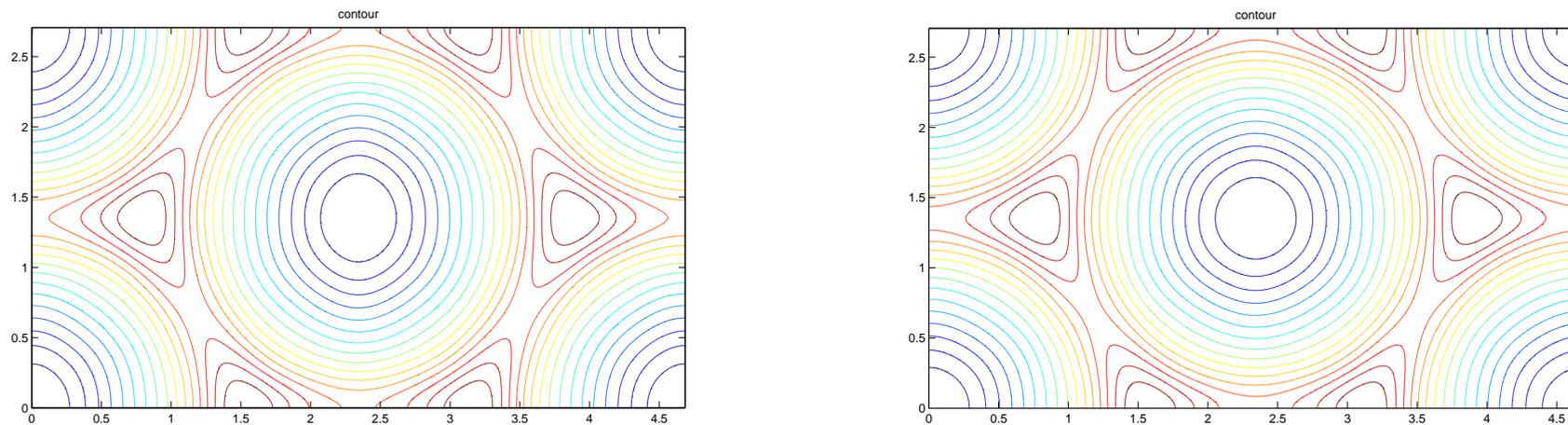


図 8: 中間の水平面  $z = 0$  における等温線

## 混合型の解 2

他方、六角形の中心あたりで流体が上昇する六角形型の解に対応する混合型の解も存在する。 図  
1 2 の左は、 $\mathcal{R}_a = 1.63 \times \mathcal{R}_c$  に対応し、右は、 $\mathcal{R}_a = 1.80 \times \mathcal{R}_c$  の時の解の等高線である。

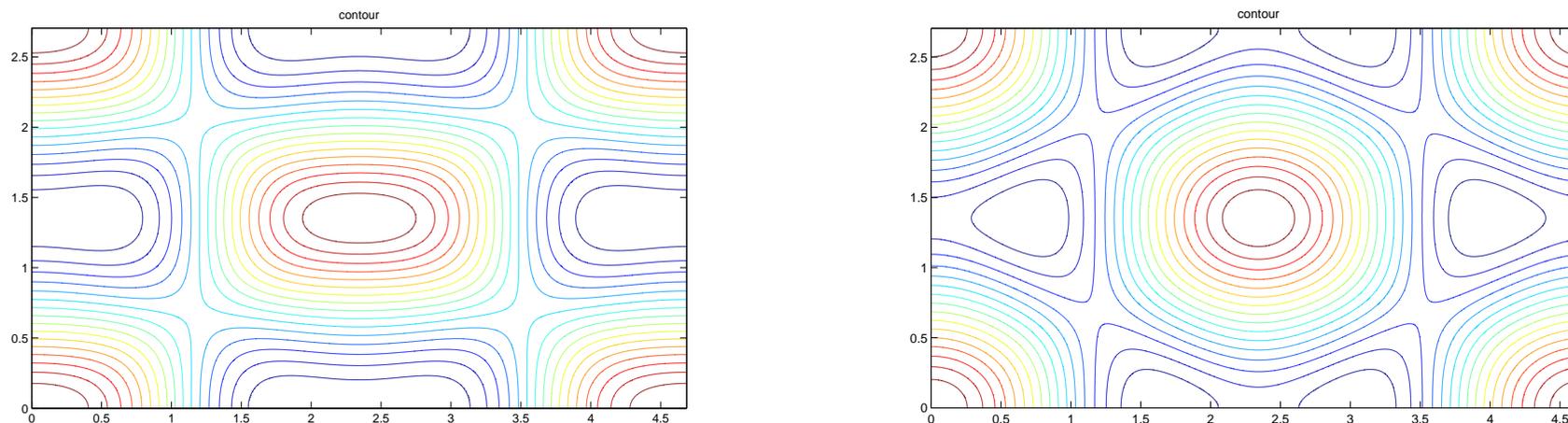


図 9: 中間の水平面  $z = 0$  における温度の等温線である。

この混合型の解の分岐曲線は、中心付近で流体が上昇する六角形型の解の分岐曲線に近づき、 $\mathcal{R}_a = 2.02 \times \mathcal{R}_c$  辺りで交差する。

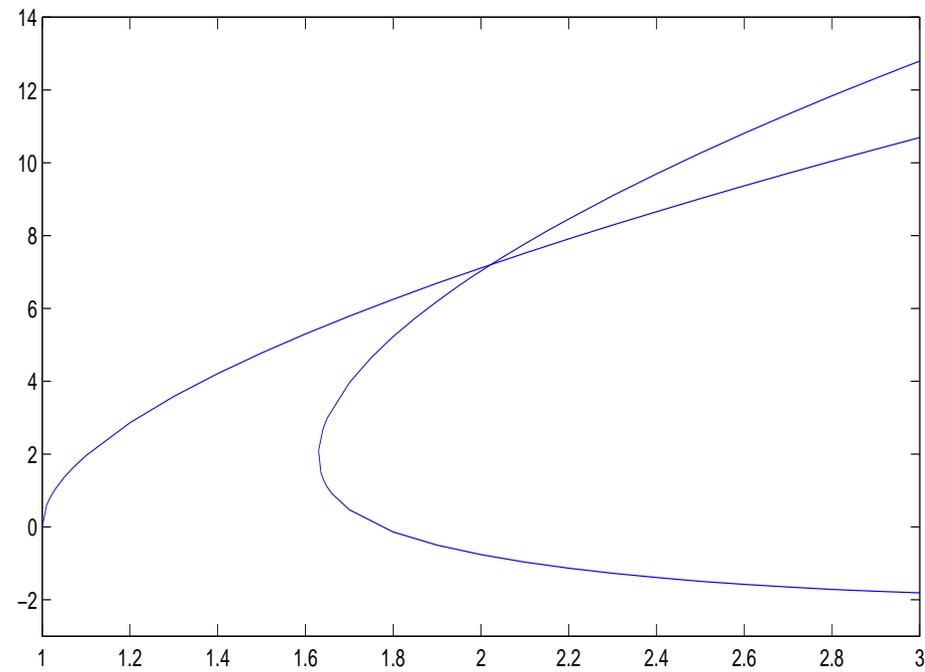


図 10:  $1.0 \leq r = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_c} \leq 3.0$  における上昇六角形型と混合型の解の分岐曲線

混合型と六角形型の解曲線の交差後  $\mathcal{R}_a = 3 \times \mathcal{R}_c$  でのそれぞれの解の等高線。

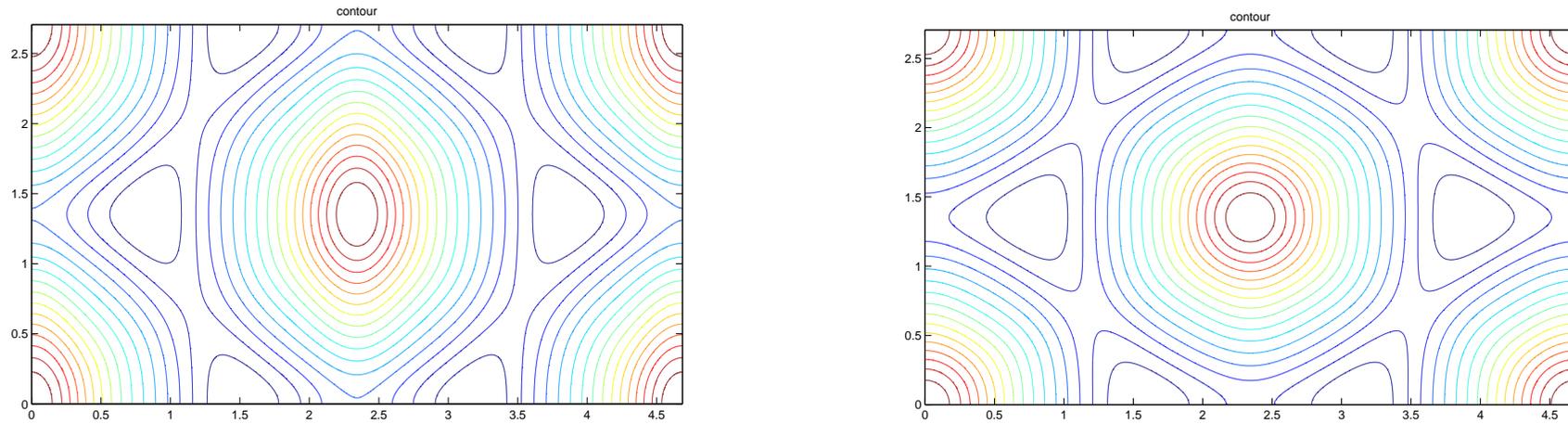


図 11: 中間の水平面  $z = 0$  における温度の等温線である。

六角形型をはじめ、これらの解の大域的な存在証明は、今後の問題である。

流体の上面が自由表面の時は、 Bénard-Marangoni 熱対流であり、問題が準線形になるために、分岐定理の適用は困難になり、数値計算はさらに困難になる。最近、最初の定常分岐と Hopf 分岐の解析的証明ができた。

## 分岐曲線の追跡、二次分岐点など

具体的にロール型の解を Rayleigh 数について大域的に求めるために、空間 2 次元であることから、流れ関数を用いれば、問題は次の様に変換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi &= \mathcal{P}_r \Delta^2 \psi + \mathcal{P}_r \mathcal{R}_a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} . \end{aligned}$$

速度の境界条件は stress free とすると、解は次の展開を持つと考えられる。

$$\begin{aligned} \psi(t, x, z) &= \sum_{l,n} \psi_{ln}(t) \sin(alx) \sin(nz) , \\ \theta(t, x, z) &= \sum_{l,n} \theta_{ln}(t) \cos(alx) \sin(nz) . \end{aligned}$$

関数空間は、この展開を持つ周期性を考慮した  $H^4 \otimes H^2$  である。

ここで、有限次元  $l + n \leq N$  で Galerkin 近似して、解を求めることになるが、その特別の場合、 $l + n \leq N = 2$  を数値計算したのが

Lorenz (1963) である。

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{11}}{dt} &= -\mathcal{P}_r A^2 \psi_{11} + \mathcal{P}_r \mathcal{R} a \frac{a}{A^2} \theta_{11}, \\ \frac{d\theta_{11}}{dt} &= a \psi_{11} - A^2 \theta_{11} + a \psi_{11} \theta_{02}, \\ \frac{d\theta_{02}}{dt} &= -4\theta_{02} - \frac{a}{2} \psi_{11} \theta_{11}.\end{aligned}$$

スケール変換後によく知られた Lorenz model になる。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= r x - y - x z, \\ \frac{dz}{dt} &= -b z + x y.\end{aligned}$$

定常ロール型解の大域的な分岐曲線は、時間依存しない方程式と解の展開を前と同様に有限次元  $l + n \leq N$  で Galerkin 近似して、Newton 法を用いた数値計算によって次の図 15 の様に得られる。  $a = 1/\sqrt{2}$  とし、横軸は、Rayleigh 数で、縦軸は、 $\psi_{1,1}$  である。

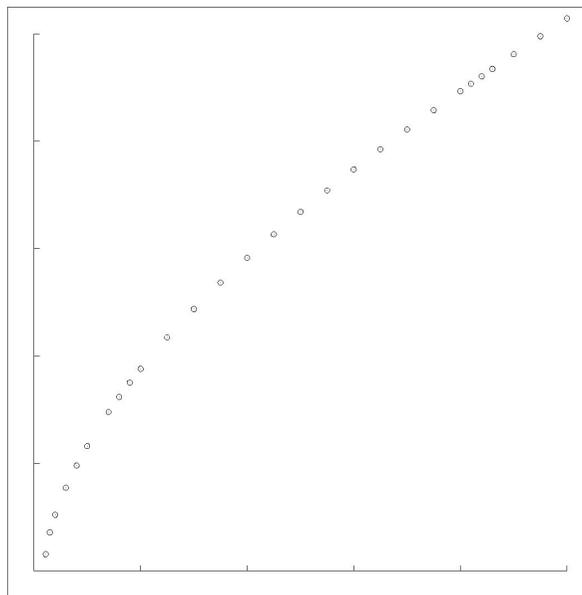


図 12: (1, 1) モードのロール型解の大域的分岐曲線  $0 \leq \mathcal{R}_a \leq 50 \mathcal{R}_c$  .

Rayleigh 数を増加させると、 $\mathcal{R}_a \simeq 41.09$  辺りで、線形化方程式の固有値は、複素共役の 2 根が虚軸を横切り不安定化している。即ち、Hopf 分岐が起っている。その時間的周期解は、時間依存の上の方程式を時間微分を差分化して数値計算で得られる。( [18] 1999 )

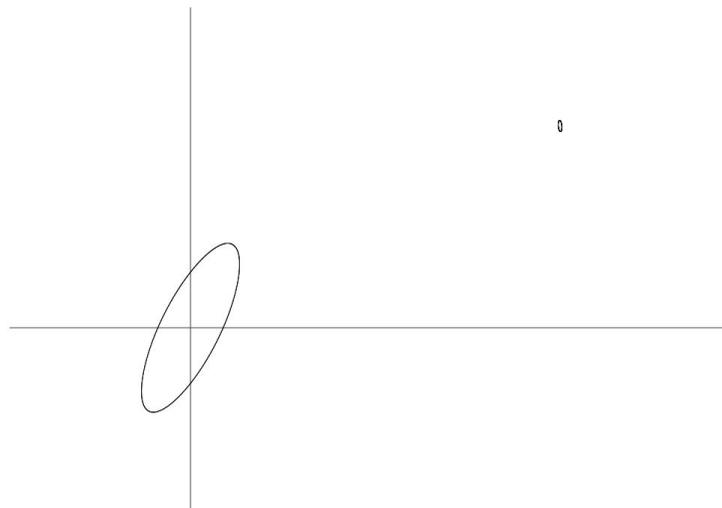


図 13: Periodic Roll-type solution of mode  $(1, 1)(2, 1)$  for  $\mathcal{R}_a = 50 \times \mathcal{R}_c$  .

不安定化の前後でも定常ロール型解の形は、ほとんど変化がない。

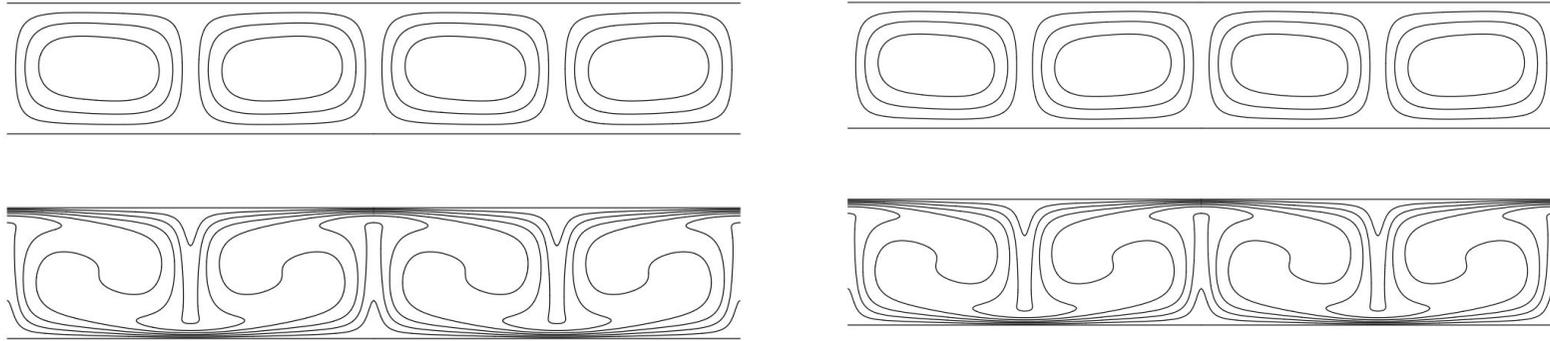


図 14: Roll-type solution of mode (1, 1) for  $\mathcal{R}_a = 40 \times \mathcal{R}_c$ ,  $\mathcal{R}_a = 43 \times \mathcal{R}_c$ .

## 二次分岐点

二次分岐点あるいは分岐曲線の交差点を特定するための数値計算には、ニュートン法を用いているために困難が生じる。即ち、分岐点等では、線形化方程式が零固有値を持つためにニュートン法に必要な線形化方程式の逆作用素を作用させる事が出来なくなるからである。しかしながら、多くの場合には、分岐を起す前の解と分岐した解とは、別の部分空間に属している。従って、このような分岐点では、それぞれの部分空間を用いることと Bordering algorithm を用いれば、数値計算および計算機援用証明が可能になる。

### 分岐曲線の追跡

$$u = u(R) \quad \text{such that} \quad \mathcal{F}(u, R) = 0 .$$

$$u_{n+1} = u_n - \mathcal{F}_u(u_n, R)^{-1} \mathcal{F}(u_n, R) .$$

### 定常二次分岐点

$$\mathcal{F}(u_0, R_0) = 0 , \quad \mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi = 0 .$$

## 定常二次分岐点

$$\mathcal{F}(u_0, R_0) = 0, \quad \mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_u(u, R) & 0 & \mathcal{F}_R(u, R) \\ \mathcal{F}_{uu}(u, R) \Phi & \mathcal{F}_u(u, R) & \mathcal{F}_{uR}(u, R) \Phi \\ 0 & 2\Phi^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \Phi \\ \delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(u, R) \\ \mathcal{F}_u(u, R) \Phi \\ \Phi^t \cdot \Phi - 1 \end{pmatrix}$$

もし

$$u = u(R) \in X_0 \subset\subset X \text{ such that } \mathcal{F}(u, R) = 0,$$

が成立てば、それぞれ

$$u, \delta u \in X_0, \quad \Phi, \delta \Phi \in X, \quad R, \delta R \in \mathbf{R}.$$

と、取ることが出来て、拡大したこの行列は可逆に成る。

例 cf. [16]

(4,0,1) モードからの分岐 :

$$Pr = 10, N = 24, Ra = 32.04265 \dots, r = 4.74706 \dots, Nuss = 2.55038 \dots$$

(4,0,1) モードからの二次分岐 :

$$Pr = 10, N = 24, Ra = 85.00512 \dots, r = 12.59335 \dots, Nuss = 4.09340 \dots$$

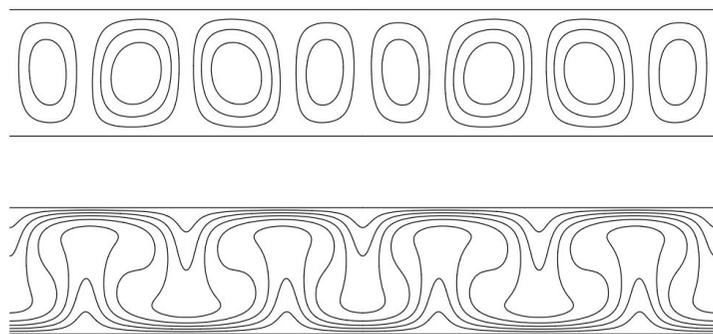


図 15: a bifurcated solution from the roll-type solution of mode (4, 0, 1) for  $\mathcal{R}_a = 13 \times \mathcal{R}_c$ .

## Hopf 二次分岐点

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_0, R_0) &= 0, & \mathcal{F}_u(u_0, R_0)\Phi &= \lambda\Phi, \\ \lambda &= i\omega, & \omega &\in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

この時には、 $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$  : 実数値 として、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_0, R_0) &= 0, \\ \mathcal{F}_u(u_0, R_0)\Phi_1 &= -\omega\Phi_2, \\ \mathcal{F}_u(u_0, R_0)\Phi_2 &= \omega\Phi_1.\end{aligned}$$

例

(2,0,1) モードからの Hopf 分岐 :

$$Pr = 10, N = 24, Ra = 277.36398 \dots, r = 41.09096 \dots, \\ \lambda = i \times 40.72434 \dots, Nuss = 6.68442 \dots$$

$$Pr = 10, N = 32, Ra = 277.36479 \dots, r = 41.09108 \dots, \\ \lambda = i \times 40.72440 \dots, Nuss = 6.68450 \dots$$

## 6 大域的な解の計算機援用存在証明

半線形偏微分方程式系の解の構成的近似として、孤立解が存在するとすると、いくらでも正確な近似解が Galerkin 近似によって存在すると云う Schauder の不動点定理を利用した次の定理が在る。

$U \subset V \subset W$  をバナッハ空間とし、埋込み  $U \subset V$  は、コンパクトとする。方程式

$$\mathcal{F}(u) \equiv Au + B(u, u) = 0$$

において、 $A : U \mapsto W$  は線形作用素、 $B : V \times V \mapsto W$  は双線形作用素で、

$$\|B(u, v)\|_W \leq K_2 \|u\|_V \|v\|_V, \quad \|B(u, v)\|_V \leq K_2 \|u\|_U \|v\|_U$$

とする。有限次元への射影  $P_N : u \in W \mapsto W_N$  が、次をみたし、 $A$  と可換であるとする。

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad v_N = P_N v, \quad \|v_N - v\|_W &\leq \frac{1}{N} \|v\|_V \\ \forall u \in U, \quad u_N = P_N u, \quad \|u_N - u\|_V &\leq \frac{1}{N} \|u\|_U \end{aligned}$$

## 定理

$$A u + B(u, u) = 0$$

この方程式の解  $u$  における線形化方程式を

$$L(u) v \equiv A v + B(u, v) + B(v, u) = f$$

としたとき、それが孤立している、即ち、ある  $K_1 < \infty$  が存在して、

$$\|L(u)^{-1} f\|_U \leq K_1 \|f\|_W$$

とすると、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、ある  $N_0$  が存在して、任意の  $N > N_0$  に対してある  $w \in U_N$  が在り、

$$A w + P_N B(w, w) = 0, \quad \|w - u\|_V < \epsilon$$

が成り立つ。

実際に数値的に解を求めるのは、Newton 法によることが多い。その方法を解の存在証明に結びつける簡易 Newton 法による収束証明は、上述の設定下に、次の形でまとめられる。

## 定理

$\bar{u} \in U_N$  を、数値的に求めた "良い" 近似とする、即ち、

$$A\bar{u} + P_N B(\bar{u}, \bar{u}) \equiv R_N, \quad \|R_N\|_W < \epsilon \ll 1$$

であって、この近似解における線形化方程式を

$$L(\bar{u})v \equiv Av + B(\bar{u}, v) + B(v, \bar{u}) = f$$

としたとき、ある  $K_1 < \infty$  が存在して、 $\|L(\bar{u})^{-1}f\|_U \leq K_1 \|f\|_W$

が成り立つと仮定する。 $\epsilon_1 = \|B(\bar{u}, \bar{u}) - P_N B(\bar{u}, \bar{u})\| (< \frac{K_2}{N} \|\bar{u}\|_U^2) \ll 1$  として 評価

$$K_1(\epsilon + \epsilon_1 + K_2\alpha^2) < \alpha$$

が成り立つならば、真の解

$$u \in U, \quad \|u - \bar{u}\|_V < \alpha$$

が存在する。

$$\mathcal{F}(u) \equiv Au + B(u, u) = 0$$

は、 $v = u - \bar{u}$  によって書換えると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &\equiv Au + B(u, u) \\ &= Av + B(\bar{u}, v) + B(v, \bar{u}) + B(v, v) \\ &\quad + A\bar{u} + P_N B(\bar{u}, \bar{u}) + B(\bar{u}, \bar{u}) - P_N B(\bar{u}, \bar{u})\end{aligned}$$

であり、簡易 Newton 法に対応する変換

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(v) &= v - L(\bar{u})^{-1} \{Av + B(\bar{u}, v) + B(v, \bar{u}) \\ &\quad + A\bar{u} + P_N B(\bar{u}, \bar{u}) + B(\bar{u}, \bar{u}) - P_N B(\bar{u}, \bar{u}) + B(v, v)\} \\ &= -L(\bar{u})^{-1} \{A\bar{u} + P_N B(\bar{u}, \bar{u}) + B(\bar{u}, \bar{u}) - P_N B(\bar{u}, \bar{u}) + B(v, v)\}\end{aligned}$$

は、 $\bar{u}$  の  $\alpha$  近傍  $\mathcal{W}$  をその中へ写している。

具体的にロール型の解を Rayleigh 数について大域的に求めるために、空間 2 次元であることから、流れ関数を用いれば、問題は次の様に書換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi &= \mathcal{P}_r \Delta^2 \psi + \mathcal{P}_r \mathcal{R}_a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} . \end{aligned}$$

速度の境界条件は stress free とすると、解は次の展開を持つと考えられる。

$$\begin{aligned} \psi(t, x, z) &= \sum_{l,n} \psi_{ln}(t) \sin(alx) \sin(nz) , \\ \theta(t, x, z) &= \sum_{l,n} \theta_{ln}(t) \cos(alx) \sin(nz) . \end{aligned}$$

関数空間は、この展開を持つ周期性を考慮した  $H^4 \otimes H^2$  である。

## ロール解の大域的存在

定常ロール型解の最初の分岐点  $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c$  から離れた所での存在証明を行うために、定常問題を不動点形式に書換える。境界条件を考慮して  $\Delta^2$  及び  $\Delta$  の逆作用素を作用させると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\psi &= \Delta^{-2} \left\{ \mathcal{R}_a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{P}_r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right) \right\} \\ \theta &= \Delta^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

これらの式を  $H^3 \otimes H^1$  で考えると、右辺の非線形項 ( $\mathcal{F}$  と記す。) はコンパクト作用素になっている。従って、 $\mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r$  を固定して、この空間に適当な有界閉凸集合  $\mathcal{W}$  を見つけて

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$$

を示せば、Schauder の不動点定理によって不動点、即ち、定常ロール型の解の存在が証明できる。この  $\mathcal{W}$  は、上述の数値計算によって求めた近似解  $\psi_N, \theta_N$  の小さい近傍として構成する。この包含関係が実際に成立することを計算機を利用して示す。即ち、計算機援用証明法として行う。具体的には、 $\mathcal{W}$  を上記のような有限次元部分での  $\psi_N, \theta_N$  の小さい近傍と残りの無限次元部分での零の小

さい近傍の和集合に分け、有限次元部分には、簡易 Newton 法を用いて評価し無限次元部分は、ノルムで評価する。いずれの評価にも区間演算による誤差評価が必要である。 $\mathcal{R}_a \simeq 10 \times \mathcal{R}_c$  くらいまでが、現在証明可能である。 [28] を参照されたい。

更に、空間 3 次元問題である六角形型、混合型の解の計算機援用による存在証明ができ始めた。 [13]

## 二次分岐点

二次分岐点あるいは分岐曲線の交差点を特定するための数値計算には、ニュートン法を用いているために困難が生じる。即ち、分岐点等では、線形化方程式が零固有値を持つためにニュートン法に必要な線形化方程式の逆作用素を作用させる事が出来なくなるからである。しかしながら、多くの場合には、分岐を起す前の解と分岐した解とは、別の部分空間に属している。従って、このような分岐点では、それぞれの部分空間を用いることと Bordering algorithm を用いれば、数値計算および計算機援用証明が可能になる。

## 参考文献

- [1] Bénard, H. : Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gén. Sci. Pure Appl.*, **11** (1900) pp.1261–1271, pp.1309–1328
- [2] Bolton, E. W. and Busse, F. H. : Stability of convection rolls in a layer with stress-free boundaries. *J. Fluid Mech.* **150** (1985) pp.487–498
- [3] Boussinesq, J. : *Théorie analytique de la chaleur*, Vol.2. Paris, Gauthier-Villars (1903)
- [4] Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. : Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **52** (1973) pp.161–180
- [5] Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. : The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **67** (1977) pp.53–72
- [6] Fujimura, Kaoru and Yamada, Syouko : The 1:2 spatial resonance on a hexagonal lattice in two-layered Rayleigh-Bénard problems, *Proc. Royal Soc. A*, **464**(2007), pp.133–153
- [7] Golubitsky, M., Swift, J. W. and Knobloch, E. : Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D.* **10** (1984) pp.249–276
- [8] Henry, D. : "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Springer-Verlag, 1981

- [9] Iohara, T., Nishida, T., Teramoto, Y. and Yoshihara, H. : "Bénard-Marangoni convection with a deformable surface", *Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ.*, **974** (1996) pp.30–42
- [10] Joseph, D. D. : On the stability of the Boussinesq equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **20** (1965) pp.59–71
- [11] Kagei, Y. and Wahl, W. v. : The Eckhaus criterion for convection roll solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations. *Intern. J. Nonlin. Mech.* **32** (1997) pp.563–620
- [12] Kawanago, T. : Computer assisted proof to symmetry-breaking bifurcation phenomena in nonlinear vibration. *Japan J. Indust, Appl. Math.*, **21** (2004) pp.75–108
- [13] Kim M., Nakao, M. T., Watanabe Y. and Nishida T. , A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Bénard problems, *Numerische Mathematik 2008*, 389–406.
- [14] Kirchgässner, K. and Kielhöfer, H.: Stability and bifurcation in fluid dynamics. *Rocky Mountain J. Math.* **3** (1973) pp.275–318
- [15] Lorenz, E. N. : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130–141
- [16] Nakao, M. T., Watanabe Y., Yamamoto N., Nishida T. and Kim M., Computer assisted proofs of bifurcating solutions for nonlinear heat convection problems, *J. of Scientific Computing*, 10 (2009) 1–18.
- [17] 西浦 廉政 : 「非線形の現象と解析」、日本評論社 ( 1979 )、『一様性を破って—不安定性、分岐、パターン形成』 31 頁—54 頁

- [18] 西田 孝明 : 数学セミナー、38 卷 (1999) 6 月号、『流体の偏微分方程式』25 頁–29 頁
- [19] Nishida, T., Ikeda, T. and Yoshihara, H. : Pattern formation of heat convection problems. Math. Model Numer. Simul. ed. by Miyoshi, T. Springer(2001) pp.209–218
- [20] Nishida, T. and Teramoto, Y. : On a linearized system arising in the study of Bénard-Marangoni convection. to appear in Proc. of Intern. Conf. on Navier-Stokes Equations and their Applications, (2006), pp.1-20, RIMS, Kyoto Univ.
- [21] Nishida, T. and Teramoto, Y.: Bifurcation theorem for the model system of Bénard-Marangoni convection. J. Math. Fluid Mechanics. (2009) 1–24
- [22] Nishida, T. and Teramoto, Y.: Pattern formations in heat convection problems. Chinese Annals of Math., Ser.B (2009) 769–784
- [23] Oberbeck, A. : Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. Annalen der Physik und Chemie **7** , (1879) p.271
- [24] 小川 知之 : ベナール対流におけるヘキサゴンパターンと複合ロールの安定性、数理研講究録、原稿 (2004)
- [25] Rayleigh, L. : On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag. Ser. 6, **32** (1916) pp.529–546

- [26] Urabe, M. : Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. Arch. Rat. Mech. Anal., **20** (1965) pp.120–152
- [27] Velte, W. : Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964) pp.97–125
- [28] Watanabe, Y., Yamamoto, N., Nakao, M. and Nishida, T. : A numerical verification method for bifurcated solutions of Rayleigh-Bénard Problems . J. Math. Fluid Mechanics. **6** (2004) pp.1–20
- [29] Yudovich, V. I. : On the onset of convection. P. M. M. ( J. Appl. Math. Mech.) **30** (1966) pp.1193–1199