松村睦豪（１９７２）函数方程式２４

定常および非定常波動伝播問題の基本解の若干の性質について（Ｉ）

2010/06　鈴木幸人

３．正則臨界点と Morse の lemma, Stationary phase の方法

Ξ^m を m 次元 Euclid 空間とし、$G \subset \Xi^m$ とする。

定義 3.1　$h \in C^\infty(G)$ に対し、$\nabla h(a) \neq 0$ なる点 $a \in G$ は正常点（regular point）と呼ばれ、$h(a)$ は h の正常値（regular value）と呼ばれる。また $\nabla h(a) = 0$ なる点 $a \in G$ は h の臨界点（critical point）或いは停留点（stationary point）と呼ばれ、$h(a)$ は h の臨界値（critical value）と呼ばれる。

定義 3.2　函数 $h \in C^\infty(G)$ の臨界点 $a \in G$ は、対称行列 $\left[\left(\partial^2 h/\partial\xi_i \partial\xi_j\right)(a)\right]$ が non-singular なとき regular または non-degenerate または simple critical point と呼ばれる。対称行列 $\left[\left(\partial^2 h/\partial\xi_i \partial\xi_j\right)(a)\right]$ を臨界点 a におけるヘッセ行列（Hessian matrix）と呼ぶ。またその行列式を Hessian と呼び Hess $h(a)$ で表す。

ヘッセ行列の正の固有値の数から負の固有値の数を引いたものをその符号数（signature）といい、負の固有値の数を指標（index）と呼ぶことにする。次の Morse の Lamma は、正則臨界点のまわりにおける函数の挙動が index により完全に記述されることを示すものである。

補題 3.3（Lemma of Morse）点 $a \in G$ を函数 $h \in C^\infty(G)$ の正則臨界点（regular critical point）とし、h の a におけるヘッセ行列の固有値を $\sigma\left[\left(\partial^2 h/\partial\xi_i \partial\xi_j\right)(a)\right] = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ とする。そのとき、a の近傍 $U \subset G$ で定義された函数の組 $\eta = (\eta_1, \dots . \eta_m), \eta_1, \dots, \eta_m \in C^\infty(U)$ が存在し

(i) $\eta(a) = 0,\ \left.\dfrac{D(\eta)}{D(\xi)}\right|_{\xi=a} = 1$

(ii) 0 *の近傍* V_0 *が存在して* $\eta \in V_0 \Rightarrow h\big(\xi(\eta)\big) = h(a) + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \eta_j^2$

が成り立つ[1]。

（証明）

座標系 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m): U \to \mathbb{R}^m$ を $\xi(a) = 0$ となるように選び、$h\big(\xi^{-1}(0)\big) = h(a) = 0$

---

[1] (i)より $a \in U$ の近傍 $U_0 \subset U$ と $0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍 $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ が存在して $\eta: U_0 \to V_0$ が微分同相写像となる。したがって、その逆写像 $\xi: V_0 \to U_0$ が存在する。

であると仮定する。そのとき $h(0,\dots,0)=0$ である[2]から、a の近傍 $U\subset G$ で定義される m 個の滑らかな函数 $\phi_i\colon U\to\mathbb{R}\,(i=1,\dots,m)$ で

$$h(\xi_1,\dots,\xi_m)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\phi_i(\xi_1,\dots,\xi_m) \tag{i}$$

および

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(0,\dots,0)=\phi_i(0,\dots,0)\quad(i=1,\dots,m) \tag{ii}$$

を満たすものが存在する。実際、函数 $f\colon[0,1]\times U\to\mathbb{R}$ を

$$f(\theta;\xi)=h(\theta\xi_1,\dots,\theta\xi_m)$$

と定義すると $f\in C^1([0,1]\times U)$ であり

$$f(0;\xi)=h(0,\dots,0)=0,\quad f(1;\xi)=h(\xi_1,\dots,\xi_m)$$

であるから

$$h(\xi_1,\dots,\xi_m)=f(1;\xi)-f(0;\xi)=\int_0^1\frac{d}{d\theta}f(\theta;\xi)d\theta$$
$$=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial h}{\partial\xi_i}(\theta\xi_1,\dots,\theta\xi_m)\,d\theta=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\int_0^1\frac{\partial h}{\partial\xi_i}(\theta\xi_1,\dots,\theta\xi_m)d\theta$$

が成り立つ。そこで

$$\phi_i(\xi_1,\dots,\xi_m)=\int_0^1\frac{\partial h}{\partial\xi_i}(\theta\xi_1,\dots,\theta\xi_m)d\theta\quad(i=1,\dots,m)$$

とすれば(i)式と(ii)式が成り立つ。更に、点 $\xi(a)=0$ は函数 h の臨界点であるから、(ii)式は

$$\phi_i(0,\dots,0)=\frac{\partial h}{\partial\xi_i}(0,\dots,0)=0\quad(i=1,\dots,m)$$

となる。したがって上記と同様の議論により、a の近傍 $U\subset G$ で定義される m 個の滑らかな函数 $\psi_{ij}\colon U\to\mathbb{R}\,(i,j=1,\dots,m)$ で

$$\phi_i(\xi_1,\dots,\xi_m)=\sum_{j=1}^{m}\xi_j\psi_{ij}(\xi_1,\dots,\xi_m)\quad(i=1,\dots,m) \tag{iii}$$

および

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_j}(0,\dots,0)=\psi_{ij}(0,\dots,0)\quad(i,j=1,\dots,m) \tag{iv}$$

を満たすものが存在する。(i)式と(iii)式より

$$h(\xi_1,\dots,\xi_m)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\phi_i(\xi_1,\dots,\xi_m)=\sum_{i,j=1}^{m}\xi_i\xi_j\psi_{ij}(\xi_1,\dots,\xi_m)$$

---

[2] 一般に、函数 $f\colon M\to\mathbb{R}, M\subset\Xi^m$ と点 $p\in M$ の近傍 $U_p\subset M$ の座標系 $x=(x_1,\dots,x_m)\colon U_p\to\mathbb{R}^m$ において $f(x_1,\dots,x_m)=f\circ x^{-1}\big(x_1(p),\dots,x_m(p)\big)=f(p)$ と略記する。

であり、したがって $\Psi_{ij} = \left(\psi_{ij} + \psi_{ji}\right)/2$ と置けば

$$\Psi_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \Psi_{ji}(\xi_1, \dots, \xi_m) \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

および

$$h(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \xi_j \Psi_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_m) \tag{v}$$

なる函数 $\Psi_{ij}: U \to \mathbb{R}\ (i, j = 1, \dots, m)$ が得られる。

原点において(v)式の二階微分を計算すると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(0, \dots, 0) = 2\Psi_{ij}(0, \dots, 0) \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

である[3]。これは対称行列であるから実固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ と互いに直交する固有ベクトルの組 $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$ が存在し、固有ベクトルに沿う座標 $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_m)$ を導入すると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi'_i \partial \xi'_j}(0, \dots, 0) = 2\Psi'_{ij}(0, \dots, 0) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

と対角化することができる[4]。函数 h は点 $\xi(a) = 0$ で正則（regular）であるから

$$\Psi'_{ii}(0, \dots, 0) = \lambda_i/2 \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

であるが、$\Psi'_{ii}: U \to \mathbb{R}\ (i = 1, \dots, m)$ は連続函数であるから、点 a の近傍 $U_i \subset U$ で

$$p \in U_i \Rightarrow \Psi'_{ii}(p) \neq 0$$

となるようなものが存在する。

そこで

---

[3] 実際

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \sum_{k,l=1}^{m} \xi_k \xi_l \Psi_{kl} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{k,l=1}^{m} \left(\delta_{kj} \xi_l \Psi_{kl} + \xi_k \delta_{lj} \Psi_{kl} + \xi_k \xi_l \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_j} \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{m} \left(\delta_{kj} \delta_{li} \Psi_{kl} + \delta_{kj} \xi_l \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_i} + \delta_{ki} \delta_{lj} \Psi_{kl} + \xi_k \delta_{lj} \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_i} \right. \\
&\qquad \left. + \delta_{ki} \xi_l \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_j} + \xi_k \delta_{li} \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_j} + \xi_k \xi_j \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) \\
&= \Psi_{ji} + \sum_{l=1}^{m} \xi_l \frac{\partial \Psi_{jl}}{\partial \xi_i} + \Psi_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \xi_k \frac{\partial \Psi_{kj}}{\partial \xi_i} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{m} \xi_l \frac{\partial \Psi_{il}}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^{m} \xi_k \frac{\partial \Psi_{ki}}{\partial \xi_j} + \sum_{k,l=1}^{m} \xi_k \xi_j \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}
\end{aligned}$$

である。

[4] 実際

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi'_i}(0, \dots, 0), \dots, \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_i}(0, \dots, 0) \right)^T = v_i \quad (i = 1, \dots, m), \qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_i}(0, \dots, 0) = v_i^k \quad (i, k = 1, \dots, m)$$

ならば

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi_k \partial \xi_l}(0, \dots, 0) \frac{\partial \xi_l}{\partial \xi'_j}(0, \dots, 0) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi_k \partial \xi_l}(0, \dots, 0) v_j^l = \lambda_j v_j^k \quad (j, k = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{k=1}^{m} v_i^k v_j^k = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial \xi'_i \partial \xi'_j}(0, \dots, 0) &= \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_i}(0, \dots, 0) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi_k \partial \xi_l}(0, \dots, 0) \frac{\partial \xi_l}{\partial \xi'_j}(0, \dots, 0) = \sum_{k,l=1}^{m} v_i^k \frac{\partial^2 h}{\partial \xi_k \partial \xi_l}(0, \dots, 0) v_j^l \\
&= \sum_{k=1}^{m} v_i^k \lambda_j v_j^k = \lambda_j \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\eta_1(\xi_1',\dots,\xi_m') = \sqrt{\frac{|\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')|}{|\Psi_{11}'(0,\dots,0)|}}\left(\xi_1' + \sum_{i=2}^{m}\xi_i'\frac{\Psi_{1i}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}{\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}\right)$$

と定義し、 U_1 上の座標系 $(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')$ を考える[5]。このとき

$$\begin{aligned}\eta_1^2 &= \frac{|\Psi_{11}'|}{|\lambda_1/2|}\left(\xi_1' + \frac{\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}'}{\Psi_{11}'}\right)^2 = \frac{\Psi_{11}'}{\lambda_1/2}\left[(\xi_1')^2 + 2\xi_1'\frac{\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}'}{\Psi_{11}'} + \left(\frac{\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}'}{\Psi_{11}'}\right)^2\right]\\ &= \frac{2}{\lambda_1}\left[(\xi_1')^2\Psi_{11}' + 2\xi_1'\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}' + \frac{(\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}')^2}{\Psi_{11}'}\right]\end{aligned}$$

であるから[6]、(v)式より

$$\begin{aligned}h &= (\xi_1')^2\Psi_{11}' + 2\sum_{i=2}^m \xi_1'\xi_i'\Psi_{1i}' + \sum_{i,j=2}^m \xi_i'\xi_j'\Psi_{ij}'\\ &= \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 - \frac{(\sum_{i=2}^m \xi_i'\Psi_{1i}')^2}{\Psi_{11}'} + \sum_{i,j=2}^m \xi_i'\xi_j'\Psi_{ij}'\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&h(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m') = \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^m \xi_i'\xi_j'\Psi_{1,ij}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m'),\\ &\Psi_{1,ij}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')\\ &\quad = \Psi_{ij}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m') - \frac{\Psi_{1i}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')\Psi_{1j}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')}{\Psi_{11}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')} \quad (i,j=2,\dots,m)\end{aligned}$$

が得られる。ここで $p\in U_1 \Rightarrow \Psi_{11}'(p)\neq 0$ であるから $\Psi_{1,ij}'\colon U_1\to\mathbb{R}$ は連続で

$$\Psi_{1,ij}'(0,\dots,0) = \Psi_{ij}'(0,\dots,0) - \frac{\Psi_{1i}'(0,\dots,0)\Psi_{1j}'(0,\dots,0)}{\Psi_{11}'(0,\dots,0)} = \frac{\lambda_i}{2}\delta_{ij}$$

が成り立つ。そこで

$$\eta_2(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m') = \sqrt{\frac{|\Psi_{1,22}'(\xi_1',\dots,\xi_m')|}{|\Psi_{1,22}'(0,\dots,0)|}}\left(\xi_2' + \sum_{i=3}^m \xi_i'\frac{\Psi_{1,2i}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')}{\Psi_{1,22}'(\eta_1,\xi_2',\dots,\xi_m')}\right)$$

と定義し、$p\in U_2 \Rightarrow \Psi_{1,22}'(p)\neq 0$ なる点 a の近傍 $U_2\subset U_1$ 上の座標系 $(\eta_1,\eta_2,\xi_3',\dots,\xi_m')$ を考えると、上と同様の議論により

---

[5] 座標変換 $(y_1,\dots,y_m) = (\eta_1(\xi_1',\dots,\xi_m'),\xi_2',\dots,\xi_m')$ の Jacobian は

$$J = \sum_{j_1,\dots,j_m=1}^m \begin{pmatrix}1,2,\dots,m\\ j_1,j_2,\dots,j_m\end{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial\xi_1'}\cdots\frac{\partial y_m}{\partial\xi_m'} = \sum_{j_1,\dots,j_m=1}^m \begin{pmatrix}1,2,\dots,m\\ j_1,j_2,\dots,j_m\end{pmatrix}\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1'}\delta_{2j_2}\cdots\delta_{mj_m} = \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1'}$$

より

$$\begin{aligned}J(\xi_1',\dots,\xi_m') &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1'}\sqrt{\frac{|\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')|}{|\Psi_{11}'(0,\dots,0)|}}\right)\left(\xi_1' + \sum_{i=2}^m \xi_i'\frac{\Psi_{1i}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}{\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}\right)\\ &\quad + \sqrt{\frac{|\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')|}{|\Psi_{11}'(0,\dots,0)|}}\left(1 + \sum_{i=2}^m \xi_i'\frac{\partial}{\partial\xi_1'}\frac{\Psi_{1i}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}{\Psi_{11}'(\xi_1',\dots,\xi_m')}\right)\end{aligned}$$

であるから $J(0,\dots,0) = 1 \neq 0$ である。

[6] $p\in U_1 \Rightarrow \Psi_{11}'(p)\neq 0$ より、U_1 において $\Psi_{11}'(p)$ は同符号である。

$$
\begin{aligned}
\eta_2^2 &= \frac{|\Psi'_{1,22}|}{|\lambda_2/2|}\left(\xi'_2 + \frac{\sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i}}{\Psi'_{1,22}}\right)^2 \\
&= \frac{\Psi'_{1,22}}{\lambda_2/2}\left[(\xi'_2)^2 + 2\xi'_2 \frac{\sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i}}{\Psi'_{1,22}} + \left(\frac{\sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i}}{\Psi'_{1,22}}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_2/2}\left[(\xi'_2)^2 \Psi'_{1,22} + 2\xi'_2 \sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i} + \frac{\left(\sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i}\right)^2}{\Psi'_{1,22}}\right]
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^m \xi'_i \xi'_j \Psi'_{1,ij} = \Psi'_{11}\eta_1^2 + (\xi'_2)^2 \Psi'_{1,22} + 2\sum_{i=3}^m \xi'_2 \xi'_i \Psi'_{1,2i} + \sum_{i,j=3}^m \xi'_i \xi'_j \Psi'_{1,ij} \\
&= \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\eta_2^2 - \frac{\left(\sum_{i=3}^m \xi'_i \Psi'_{1,2i}\right)^2}{\Psi'_{1,22}} + \sum_{i,j=3}^m \xi'_i \xi'_j \Psi'_{1,ij}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
h(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m) = \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\eta_2^2 + \sum_{i,j=3}^m \xi'_i \xi'_j \Psi'_{2,ij}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m),
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi'_{2,ij}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m) \\
&\quad = \Psi'_{1,ij}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m) \\
&\qquad - \frac{\Psi'_{1,2i}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m)\Psi'_{1,2j}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m)}{\Psi'_{1,22}(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m)} \ (i, j = 2, \dots, m)
\end{aligned}
$$

が得られる。これを繰り返すことにより

$$
h(\eta_1, \eta_2, \xi'_3, \dots, \xi'_m) = \frac{\lambda_1}{2}\eta_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\eta_2^2 + \cdots + \frac{\lambda_m}{2}\eta_m^2
$$

なる座標系 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m): U_m \to \mathbb{R}^m$ が得られる。

系 3.4　正則臨界点は孤立している。

The method of stationary phase in m dimensions

$G \subset \Xi^m$ を m 次元 Euclid 空間 Ξ^m の開集合とし、函数 $h: G \to \mathbb{R}$ と $g: G \to \mathbb{C}$ はそれぞれ $h \in C^\infty(G)$ および $g \in C_0^\infty(G)$ であるとする。このとき、次の形の積分で定義される函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$
f(t) = \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi \tag{1}
$$

の $|t| \to \infty$ のときの様子を調べる。

定理 3.5　(i) $\operatorname{supp} g$ の点が全て h の正常点、すなわち $\forall \xi \in \operatorname{supp} g, \nabla h(\xi) \neq 0$ であるならば、任意の $\nu > 0$ に対し

$$f(t) = O(|t|^{-\nu}) \quad \text{as } |t| \to \infty \tag{2}$$

が成り立つ。

(ii) 函数 h が $\operatorname{supp} g$ 上に有限個の正則臨界点 $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ をもつものとする。そのとき次の漸近公式（asymptotic formula）が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(t) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \sum_{l=1}^{r} \frac{g\left(a^{(l)}\right)}{\sqrt{\left|\operatorname{Hess} h(a^{(l)})\right|}} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sig}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_i \partial\xi_j}(a^{(l)})\right)\operatorname{sgn} t} e^{ith\left(a^{(l)}\right)} |t|^{-\frac{m}{2}} \\ + O\left(|t|^{-\frac{(m+2)}{2}}\right) \quad \text{as } |t| \to \infty \end{aligned} \tag{3}$$

ただし $\operatorname{sig}\left(\partial^2 h/\partial\xi_i\partial\xi_j(a)\right)$ はヘッセ行列 $\partial^2 h/\partial\xi_i\partial\xi_j(a)$ の符号数であり、$\operatorname{sgn} t$ は t の符号を表す。

（証明）

(i) 一般に

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} e^{ith(\xi)} = it \frac{\partial h}{\partial\xi_j}(\xi) e^{ith(\xi)}$$

より

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial\xi_j}(\xi) \frac{\partial}{\partial\xi_j} e^{ith(\xi)} = it \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial h}{\partial\xi_j}(\xi)\right]^2 e^{ith(\xi)} = it|\nabla h(\xi)|^2 e^{ith(\xi)}$$

である。したがって、すべての $\xi \in \operatorname{supp} g$ において $\nabla h(\xi) \neq 0$ であるから

$$e^{ith(\xi)} = \frac{1}{it|\nabla h(\xi)|^2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial\xi_j}(\xi) \frac{\partial}{\partial\xi_j} e^{ith(\xi)}$$

が成り立つ。これを用いると（$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して）

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi = \int_{\mathrm{supp}\, g} e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathrm{supp}\, g} \left[\frac{1}{it|\nabla h(\xi)|^2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{ith(\xi)} \right] g(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathrm{supp}\, g} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{e^{ith(\xi)} g(\xi)}{it|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] d\xi \\
&\quad - \int_{\mathrm{supp}\, g} e^{ith(\xi)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{g(\xi)}{it|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] d\xi \\
&= -\frac{1}{it} \int_{\mathrm{supp}\, g} e^{ith(\xi)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{g(\xi)}{|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] d\xi \\
&= -\frac{1}{it} \int_{\mathrm{supp}\, g} \left[\frac{1}{it|\nabla h(\xi)|^2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{ith(\xi)} \right] g_1(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{(-it)^2} \int_{\mathrm{supp}\, g} e^{ith(\xi)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{g_1(\xi)}{|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] d\xi = \cdots \\
&= \frac{1}{(-it)^n} \int_{\mathrm{supp}\, g} e^{ith(\xi)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{g_{n-1}(\xi)}{|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] d\xi
\end{aligned}
$$

ただし

$$
g_k(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{g_{k-1}(\xi)}{|\nabla h(\xi)|^2} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi) \right] \quad (k = 1, \dots, n-1),
$$

$$
g_0(\xi) = g(\xi)
$$

が得られる。ここで $\forall \xi \in \mathrm{supp}\, g, \nabla h(\xi) \neq 0$ および $h, g \in C^\infty(\mathrm{supp}\, g)$ より

$$
g_k \in C^\infty(\mathrm{supp}\, g) \subset L_1(\mathrm{supp}\, g) \quad \left(\because g \in C_0^\infty(G)\right)
$$

であるから

$$
f(t) = O(t^{-n}) \quad \text{as } t \to \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})
$$

が得られる。

(ii) $g \in C_0^\infty(G)$ であるから、(1)式の積分は任意の大きさの support をもつ函数 g に対する積分の有限個の和として表すことができる（脚注 7 参照）。そこで、以下では $\mathrm{supp}\, g$ は適宜十分小さな領域に含まれるものと仮定する。特に、正則臨界点は孤立点であるから、$\mathrm{supp}\, g$ には唯一つの正則臨界点 a のみが存在すると仮定することができる。

Morse の lemma より、点 $a \in \mathrm{supp}\, g$ の近傍 $U_a \subset \Xi^m$ から原点の近傍 $V_0 \subset \Xi^m$ への微分同相写像 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m): U_a \to V_0$ で

$$
\eta(a) = 0, \quad \left.\frac{D(\eta)}{D(\xi)}\right|_{\xi = a} = \left(\left.\frac{D(\xi)}{D(\eta)}\right|_{\eta = 0} \right)^{-1} = 1 \tag{4}
$$

を満たし[7]、函数 h を V_0 上で

$$h\big(\xi(\eta)\big) = h(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \eta_j^2 \tag{5}$$

と表すことができるものが存在する。ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ はヘッセ行列 $\partial^2 h/\partial\xi_i\partial\xi_j(a)$ の固有値で、$\xi: V_0 \to U_a$ は微分同相写像 $\eta: U_a \to V_0$ の逆写像を表す。なお、上記のように $\operatorname{supp} g$ は十分小さな領域に含まれると仮定しているから、特に $g \in C_0^\infty(U_a)$ であり（したがって $g \circ \xi \in C_0^\infty(V_0)$ である）さらに V_0 は $V_0 = \big(-2r_g, 2r_g\big) \times \cdots \times (-2r_g, 2r_g)$ ただし $r_g = \sup_{\eta \in \operatorname{supp} g\circ\xi} |\eta|$ と表せるものとする。この座標変換を用いると、(1)式の積分は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi = \int_{U_a} e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi \\ &= \int_{V_0} e^{it\left[h(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2\right]} g\big(\xi(\eta)\big) \frac{D(\xi)}{D(\eta)} d\eta \\ &= e^{ith(a)} \int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \psi(\eta) d\eta \end{aligned} \tag{6}$$

ただし

$$\psi(\eta) = g\big(\xi(\eta)\big) \frac{D(\xi)}{D(\eta)}(\eta)$$

と表される。このとき、(5)式より

$$\psi(0) = g\big(\xi(0)\big) \frac{D(\xi)}{D(\eta)}(0) = g(a) \tag{7}$$

である。

　そこで、積分

$$J(t) = \int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \psi(\eta) d\eta \tag{8}$$

の $|t| \to \infty$ のときの挙動を調べる。まず偶関数 $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\rho(s) = \begin{cases} 1 & \text{for } |s| \le \sup\limits_{\eta \in \operatorname{supp}\psi} |\eta| \\ 0 & \text{for } |s| \ge 2r_g \end{cases} \tag{9}$$

となるもの[8]をとり

$$\phi(\eta) = \rho(\eta_1) \cdots \rho(\eta_m) \tag{10}$$

とおく[9]。このとき(9)式の積分は

---

[7] Jacobian: $D(\eta)/D(\xi)$ は連続であるから、$D(\eta)/D(\xi)|_{\xi=a} = 1$ より点 a のある近傍上で $D(\eta)/D(\xi) \ne 0$ であり、したがって最初から $\xi \in U_a \Rightarrow D(\eta)/D(\xi) \ne 0$ であると仮定することができる。すなわち、$D(\eta)/D(\xi)|_{\xi=a} = 1$ の条件によって、写像 $\eta \in C^\infty(U_a)$ が微分同相写像であるとすることが正当化される。

[8] $\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp} g \circ \xi$ であるから $\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\psi} |\eta| \le \sup_{\eta\in\operatorname{supp} g\circ\xi} |\eta| = r_g < 2r_g$ が成り立つ。

[9] このとき $\eta \in \operatorname{supp}\psi \Rightarrow \phi(\eta) = 1$ および $\operatorname{supp}\phi \subset V_0$ である。

$$J(t) = \int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\eta_j^2}\psi(\eta)\phi(\eta)d\eta \tag{11}$$

と表される。また $\psi \in C^\infty(V_0)$ であるから Taylor 級数展開により

$$\psi(\eta) = \psi(0) + \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha\eta^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \tag{12}$$

ただし

$$a_\alpha = \frac{\partial^\alpha\psi(0)}{\alpha!}, \quad b_\alpha(\eta) = \frac{N}{\alpha!}\int_0^1 (1-\theta)^{N-1}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)d\theta$$

と表すことができる [10]。これを(12)式に代入すると

---

[10] $\{\beta-1\} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+ | |\alpha| = |\beta-1|, \alpha \le \beta\}$ と定義する。これを用いると $\sum_{|\alpha|=k-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)$ の θ に関する微分は

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sum_{|\alpha|=k-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)\right) = \sum_{|\beta|=k}\sum_{\alpha\in\{\beta-1\}}\frac{\eta^\beta}{\alpha!}\partial^\beta\psi(\theta\eta) = \sum_{|\beta|=k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta!}\eta^\beta\partial^\beta\psi(\theta\eta)$$
$$= \sum_{|\beta|=k}\frac{|\beta|}{\beta!}\eta^\beta\partial^\beta\psi(\theta\eta) = \sum_{|\beta|=k}|\beta|\frac{\eta^\beta}{\beta!}\partial^\beta\psi(\theta\eta)$$

（$k = 1, \dots, N$）と計算することができる。したがって $\Psi(\theta) = \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}(1-\theta)^{|\alpha|}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)$ の微分は

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\sum_{0\le|\alpha|\le N-1}(1-\theta)^{|\alpha|}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)\right)$$
$$= \sum_{1\le|\alpha|\le N-1}(-|\alpha|)(1-\theta)^{|\alpha|-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(\theta\eta) + \sum_{1\le|\beta|\le N}(1-\theta)^{|\beta|-1}|\beta|\frac{\eta^\beta}{\beta!}\partial^\beta\psi(\theta\eta)$$
$$= \sum_{|\beta|=N}(1-\theta)^{|\beta|-1}|\beta|\frac{\eta^\beta}{\beta!}\partial^\beta\psi(\theta\eta) = \sum_{|\beta|=N}\eta^\beta\frac{N}{\beta!}(1-\theta)^{N-1}\partial^\beta\psi(\theta\eta)$$

と計算することができ、また

$$\Psi(0) = \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}(1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\psi(0) = \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(0)$$
$$\Psi(1) = \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}(0)^{|\alpha|}\partial^\alpha\psi(\eta) = \psi(\eta)$$

であるから、$\Psi(1) - \Psi(0) = \int_0^1\frac{d\psi}{d\theta}d\theta$ より

$$\psi(\eta) = \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\psi(0) + \int_0^1\sum_{|\alpha|=N}\eta^\alpha\frac{N}{\alpha!}(1-\theta)^{N-1}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)\,d\theta$$
$$= \sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{\partial^\alpha\psi(0)}{\alpha!}\eta^\alpha + \sum_{|\alpha|=N}\eta^\alpha\frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial^\alpha\psi(\theta\eta)d\theta$$

が得られる。

$$
\begin{aligned}
J(t) &= \int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \phi(\eta) \left[\psi(0) + \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha \eta^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha\right] d\eta \\
&= \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \phi(\eta) \left[\psi(0) + \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha \eta^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha\right] d\eta \\
&= \psi(0)\int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \phi(\eta) d\eta + \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} \phi(\eta)\eta^\alpha d\eta \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=N} \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta \\
&= \psi(0)\int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \rho(\eta_1)\cdots\rho(\eta_m) d\eta_1 \cdots d\eta_m \\
&\quad + \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \rho(\eta_1)\cdots\rho(\eta_m)\eta_1^{\alpha_1}\cdots\eta_m^{\alpha_m} d\eta_1 \cdots d\eta_m \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=N} \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta
\end{aligned}
$$

であり [11]、したがって

$$
\begin{aligned}
&J(t) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t), \\
&\quad J_1(t) = \psi(0)\prod_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} \rho(\eta_j) d\eta_j, \\
&\quad J_2(t) = \sum_{1\le|\alpha|\le N-1} a_\alpha \prod_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j, \\
&\quad J_3(t) = \sum_{|\alpha|=N} \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta
\end{aligned}
\tag{13}
$$

が得られる。

$J_1(t)$ の各成分は次のように表すことができる。

$$
\begin{aligned}
J_{1j}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} d\eta_j + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} [\rho(\eta_j) - 1] d\eta_j
\end{aligned}
\tag{14}
$$

この右辺第１項は、$s = \sqrt{|\lambda_j t|/2} \cdot \eta_j$ なる変数変換を施すと

$$
\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2} d\eta_j = \int_{-R}^{R} e^{is^2 \mathrm{sgn}(\lambda_j t)} \sqrt{\frac{2}{|\lambda_j t|}} ds = \sqrt{\frac{2}{|\lambda_j t|}} \int_{-R}^{R} e^{is^2 \mathrm{sgn}(\lambda_j t)} ds
$$

[11] 二つ目の等号において、$b_\alpha(\eta)$ の定義域を V_0 から全領域 Ξ^m に広げているが、それは例えば $\eta \in \Xi^m \setminus V_0 \Rightarrow b_\alpha(\eta) = 0$ と解釈する。$\mathrm{supp}\,\phi \subset V_0$ である（脚注５）から、$b_\alpha(\eta)$ の定義域の拡張は積分の値に影響を与えない。

と表せるから（変数変換：$t=(\mp is^2)^{1/2}=(\mp i)^{1/2}s=e^{\mp i\pi/4}s$ によって得られる[12]）

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\pm is^2}ds=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-t^2}e^{\pm i\pi/4}dt=e^{\pm i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}e^{\pm i\pi/4} \tag{15}$$

を用いると

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}d\eta_j=\sqrt{\frac{2}{|\lambda_j t|}}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{is^2\operatorname{sgn}(\lambda_j t)}ds=\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda_j t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(\lambda_j t)} \tag{16}$$

となる。第２項は、被積分関数が偶関数であるから

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}[\rho(\eta_j)-1]d\eta_j=2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}[\rho(\eta_j)-1]d\eta_j$$

と表すことができ、部分積分により（任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して）

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}[\rho(\eta_j)-1]d\eta_j\\
&=\left[e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{\rho(\eta_j)-1}{it\lambda_j\eta_j}\right]_{\eta_j=0}^{\eta_j=\infty}-\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{it\lambda_j\eta_j}\right)d\eta_j\\
&=-\frac{1}{it\lambda_j}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{\eta_j}\right)d\eta_j\\
&=(-it\lambda_j)^{-1}\left\{\left[e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{\eta_j}\right)}{it\lambda_j\eta_j}\right]_{\eta_j=0}^{\eta_j=\infty}\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{\eta_j}\right)}{it\lambda_j\eta_j}\right)d\eta_j\right\}\\
&=(-it\lambda_j)^{-2}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{1}{\eta_j}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{\eta_j}\right)\right)d\eta_j=\cdots\\
&=(-it\lambda_j)^{-n}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{1}{\eta_j}\frac{d}{d\eta_j}\left(\cdots\frac{1}{\eta_j}\frac{d}{d\eta_j}\left(\frac{\rho(\eta_j)-1}{\eta_j}\right)\cdots\right)\right)d\eta_j
\end{aligned}$$

---

[12] これは実軸上の積分路 $[-R,R]$ を複素平面上で $\pm\pi/4$ だけ回転することに相当する。この回転によって生じる差は半径 R の円周（の一部）上の積分として表され、$\left|e^{\pm i(Re^{i\theta})^2}\right|=\left|e^{\pm iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}\right|=e^{\mp R^2\sin 2\theta}$ であるから、$R\to\infty$ としたとき、その差は $\pm$ の符号が＋のときには $0<\theta<\pi/2$ および $\pi<\theta<(3/2)\pi$ のとき、－のときには $\pi/2<\theta<\pi$ および $(3/2)\pi<\theta<2\pi$ のとき０に収束する。これによりこの積分路の回転が正当化される。

となる。ここで関数

$$F(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\cdots\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho(s)-1}{s}\right)\cdots\right)\right)$$

は $|s|\le\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\psi}|\eta|\Rightarrow\rho(s)-1=0$ より $|s|\le\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\psi}|\eta|\Rightarrow F(s)=0$ である。これと $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ より $F\in C^\infty(\mathbb{R})$ であり、また $F(s)=O(s^{-2}),\ s\to\infty$ であるから F は可積分である。したがって、(15)式の右辺第２項は任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\left[\rho(\eta_j)-1\right]d\eta_j=O(t^{-n}),\ \ t\to\infty$$

と評価することができる。以上より(15)式の積分は

$$J_{1j}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\rho(\eta_j)d\eta_j=\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda_j t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(\lambda_j t)}+O(t^{-n}),\ \ t\to\infty \tag{17}$$

と表すことができ、したがって

$$\begin{aligned}J_1(t)&=\psi(0)\prod_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda_j t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(\lambda_j t)}+O(t^{-n})\\&=\frac{\psi(0)(2\pi)^{m/2}}{|\lambda_1\cdots\lambda_m|^{1/2}|t|^{m/2}}e^{\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{sgn}(\lambda_j t)}+O(t^{-n})\end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。

$J_2(t)=\sum_{1\le|\alpha|\le N-1}a_\alpha\prod_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{2}\lambda_j\eta_j^2}\eta_j^{\alpha_j}\rho(\eta_j)d\eta_j$ に関しては、まず

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds=O\left(|t|^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{19}$$

なる関係が成り立つことに注意する。実際

$$\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}=it\lambda se^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\qquad\therefore\ se^{\frac{it\lambda}{2}s^2}=\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s\rho(s)ds=\frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho(s)ds$$

であるが、部分積分により

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds&=\frac{1}{it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho(s)\right]_{s=-\infty}^{s=\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\big(s\rho(s)\big)ds\right\}\\&=-\frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\big(\rho(s)+s\rho'(s)\big)ds\end{aligned}$$

が得られる。ここで、函数 ρ の定義（(10)式）より $|s|\le\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\psi}|\eta|\Rightarrow\rho'(s)=0$ および $\operatorname{supp}\rho'\subset\operatorname{supp}\rho\subset\left[-2r_g,2r_g\right]$ であるから(15)式右辺第２項と同様の議論により（任意

の $n \in \mathbb{N}$ に対して）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} s\rho'(s)ds = O(t^{-n}),\ \ t \to \infty$$

なる評価が得られる[13]。一方、(18)式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} \rho(s)ds = J_{1j}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n}),\ \ t \to \infty$$

であるから合せて

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} s^2\rho(s)ds = -\frac{1}{it\lambda}\left[\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n})\right]$$

$$= O\left(t^{-3/2}\right),\ \ t \to \infty$$

が得られる。同様にして、任意の $b > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} s^{2b}\rho(s)ds = O\left(|t|^{-\frac{2b+1}{2}}\right) \tag{20}$$

を示すことができる[14]。α_j が奇数のときには

---

13 実際

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} s\rho'(s)ds = \left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{s\rho'(s)}{it\lambda s}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\frac{s\rho'(s)}{it\lambda s}ds = \frac{1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left[\frac{s\rho'(s)}{s}\right]ds$$
$$= \cdots = \frac{1}{(-it\lambda)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left[\cdots\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\frac{\rho''(s)}{s}\right]ds$$

が成り立つ。

14 実際 $b \in \mathbb{N}$ ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} s^{2b}\rho(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s^{2b-1}\rho(s)ds = \frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-1}\rho(s)ds$$
$$= \frac{1}{it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-1}\rho(s)\right]_{s=-\infty}^{s=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left(s^{2b-1}\rho(s)\right)ds\right\}$$
$$= -\frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}[(2b-1)s^{2b-2}\rho(s) + s^{2b-1}\rho'(s)]ds$$
$$= \frac{2b-1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-2}\rho(s)ds + O(t^{-n})$$
$$= \frac{2b-1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s^{2b-3}\rho(s)ds + O(t^{-n})$$
$$= \frac{2b-1}{-it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{s^{2b-3}\rho(s)}{it\lambda}\right]_{s=-\infty}^{s=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{2b-3}\rho(s)}{it\lambda}\right)ds\right\} + O(t^{-n})$$
$$= \frac{2b-1}{(-it\lambda)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}[(2b-3)s^{2b-4}\rho(s) + s^{2b-3}\rho'(s)]ds + O(t^{-n})$$
$$= \frac{(2b-1)(2b-3)}{(-it\lambda)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-4}\rho(s)ds + O(t^{-n}) = \cdots$$
$$= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots\left(2b-(2l-1)\right)}{(-it\lambda)^l}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-2l}\rho(s)ds + O(t^{-n}) = \cdots$$
$$= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots 2\cdot 1}{(-it\lambda)^b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\rho(s)ds + O(t^{-n})$$
$$= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots 2\cdot 1}{(-it\lambda)^b}\left[\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n})\right] + O(t^{-n}) = O\left(t^{-b+\frac{1}{2}}\right)$$

が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j = 0$$

であるから、$J_2(t)$ は

$$\begin{aligned}
J_2(t) &= \sum_{1 \le |\alpha| \le N-1} a_\alpha \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&\quad + \sum_{4 \le |\alpha| \le N-1} a_\alpha \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&= a_{20\cdots0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1 \eta_1^2} \eta_1^2 \rho(\eta_1) d\eta_1 \right) \prod_{j=2}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&\quad + a_{020\cdots0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_2 \eta_2^2} \eta_2^2 \rho(\eta_2) d\eta_2 \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne 2}}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \rho(\eta_j) d\eta_j + \cdots \\
&\quad + a_{00\cdots02} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_m \eta_m^2} \eta_m^2 \rho(\eta_m) d\eta_m \right) \prod_{j=1}^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \rho(\eta_j) d\eta_j \qquad (21) \\
&\quad + \sum_{4 \le |\alpha| \le N-1} a_\alpha \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j \\
&= a_{20\cdots0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1 \eta_1^2} \eta_1^2 \rho(\eta_1) d\eta_1 \right) \prod_{j=2}^{m} J_{1j}(t) \\
&\quad + a_{020\cdots0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_2 \eta_2^2} \eta_2^2 \rho(\eta_2) d\eta_2 \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne 2}}^{m} J_{1j}(t) + \cdots \\
&\quad + a_{00\cdots02} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_m \eta_m^2} \eta_m^2 \rho(\eta_m) d\eta_m \right) \prod_{j=1}^{m-1} J_{1j}(t) \\
&\quad + \sum_{4 \le |\alpha| \le N-1} a_\alpha \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_j \eta_j^2} \eta_j^{\alpha_j} \rho(\eta_j) d\eta_j
\end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、(18)式、(20)式および(21)式より、その漸近評価は

$$J_2(t) = O\left(t^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right), \ |t| \to \infty \qquad (22)$$

となる。

$J_3(t)$ に関しても同様に処理することができる。例えば $\alpha_1 \ge 1$ であるとき

$$\int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\eta_1^{\alpha_1} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_1) \cdots \rho(\eta_m) d\eta_1 \cdots d\eta_m$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_2\eta_2^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \eta_2^{\alpha_2} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_2) \cdots \rho(\eta_m)$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{it\lambda_1} \cdot \frac{d}{d\eta_1} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \right) b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m) \eta_1^{\alpha_1 - 1} \rho(\eta_1) d\eta_1 \right\} d\eta_2 \cdots d\eta_m$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_2\eta_2^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \eta_2^{\alpha_2} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_2) \cdots \rho(\eta_m)$$

$$\cdot \left\{ \left[e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \frac{b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\rho(\eta_1)\eta_1^{\alpha_1 - 1}}{it\lambda_1} \right]_{-\infty}^{\infty} \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \frac{d}{d\eta_1} \left(\frac{b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\rho(\eta_1)\eta_1^{\alpha_1 - 1}}{it\lambda_1} \right) d\eta_1 \right\} d\eta_2 \cdots d\eta_m$$

$$= \frac{1}{-it\lambda_1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_2\eta_2^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \eta_2^{\alpha_2} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_2) \cdots \rho(\eta_m)$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} \frac{d}{d\eta_1} \left(b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\rho(\eta_1)\eta_1^{\alpha_1 - 1} \right) d\eta_1 \right\} d\eta_2 \cdots d\eta_m$$

$$= \frac{1}{-it\lambda_1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda_1\eta_1^2} e^{\frac{it}{2}\lambda_2\eta_2^2} \cdots e^{\frac{it}{2}\lambda_m\eta_m^2} \eta_2^{\alpha_2} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_2) \cdots \rho(\eta_m)$$

$$\cdot \frac{d}{d\eta_1} \left(b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\rho(\eta_1)\eta_1^{\alpha_1 - 1} \right) d\eta_1 d\eta_2 \cdots d\eta_m$$

と部分積分することができる。ここで $b_\alpha \in C^\infty(V_0)$ であり、また $\operatorname{supp}\rho \subset [-2r_g, 2r_g] \subset V_0$ であるから函数

$$G(\eta) = \eta_2^{\alpha_2} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \rho(\eta_2) \cdots \rho(\eta_m) \frac{d}{d\eta_1} \left(b_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m)\rho(\eta_1)\eta_1^{\alpha_1 - 1} \right)$$

は $G \in C_0^\infty(V_0)$ であり、したがって可積分である。これを $\alpha_j \geq 1$ なる指数について繰り返すことにより

$$\int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta = O\left(t^{-|\alpha|}\right), \ |t| \to \infty$$

したがって

$$J_3(t) = \sum_{|\alpha|=N} \int_{\Xi^m} e^{\frac{it}{2}\sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j^2} b_\alpha(\eta)\eta^\alpha \phi(\eta) d\eta = O(t^{-N}), \ |t| \to \infty \qquad (23)$$

であることが示される。なお、ここで $N \in \mathbb{N}$ は任意にとることができる[15]。

---

[15] 実際、(13)式の Taylor 級数展開において $N \in \mathbb{N}$ は任意にとることができ、また $J_2(t)$ の評価において N の具体的な値は結果に影響を与えない。

以上をまとめると、(19)式、(23)式および(24)式より

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$$

$$= \frac{\psi(0)(2\pi)^{m/2}}{|\lambda_1 \cdots \lambda_m|^{1/2}|t|^{m/2}} e^{\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sgn}(\lambda_j t)} + O(t^{-\infty}) + O\left(t^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right) + O(t^{-\infty})$$

が得られるが、

$$\psi(0) = g(a),$$

$$\lambda_1 \cdots \lambda_m = \det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(a)\right) = \mathrm{Hess}\, h(a),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sgn}\, \lambda_j = \mathrm{sig}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(a)\right)$$

であるから、(7)式より

$$f(t) = e^{ith(a)} J(t)$$

$$= (2\pi)^{m/2} \frac{g(a)}{|\mathrm{Hess}\, h(a)|^{1/2}} e^{\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sig}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(a)\right) \mathrm{sgn}\, t} e^{ith(a)} |t|^{m/2} \quad \textbf{(24)}$$

$$+ O\left(t^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right), \quad |t| \to \infty$$

が成り立つ。