講義名：　流体数学特別講義
対象：　博士後期課程　後期　２単位
曜日：金曜　２時限，３時限，４時限
担当：　柴田良弘、西田孝明，山崎昌男，舟木直久、小薗英雄
講義内容：　流体数学研究の基礎となる内容を適時選び講義を行なう.
シラバス　(2010 年度)

1.　流体のパターン形成と計算機援用解析
(Pattern formations in fluids and computer assisted analysis)
(担当：　西田孝明)
1.1 流体のパターン形成の例。
(Examples of pattern formations in fluids)
1.2 分岐定理の解説
(Bifurcation theories)
1.3 分岐定理の応用。
(Applications of bifurcation theorems)
1.4 計算機援用解析の必要性。
(Computer assisted analysis)
1.5 計算機援用解析の例
(Computer assisted analysis in mathematical fluid mechanics)

講義概要
流体運動において物理パラメーターを変化させると平衡状態から様々なパターンが現れる。その始めの変化は、分岐現象になっている事が多い。Taylor 問題や熱対流問題のパターン形成を分岐理論から説明する。その際、解析できていないあるいは解析できないパラメーター領域の解の様子を知るには計算機の利用が欠かせない。大域的な分岐現象の計算機援用証明を含む解析の実際例を説明する。

講義概要の英訳
Pattern formations from the equilibrium state in fluid motions may be treated by the bifurcation theories. Bifurcation theorems can be applied to explain Taylor vortices of Taylor problems and hexagonal cells of heat convection problems as the first bifurcation. Computer assisted analyses become necesssary to see global bifurcation structures. Examples of computer assisted proofs and anlyses are explained for some heat convection problems.

2.　確率微分方程式および確率偏微分方程式入門

（Introduction to the theory of stochastic differential equations and stochastic partial differential equations）

(担当：　舟木直久（東大数理））

2.1. 確率論の基礎的な概念

（Some basic concepts in probability theory）

2.2. ブラウン運動

（Brownian motion）

2.3. 確率積分と伊藤の公式

（Stochastic integrals and Ito's formula）

2.4. 確率微分方程式

(Stochastic differential equations)

2.5. 確率偏微分方程式

(Stochastic partial differential equations)

講義概要

対象が確率論を専攻する学生ではないことを考慮して、1 でごく簡単に確率空間、確率変数、その収束の概念、独立性、中心極限定理とガウス分布など確率論の基礎的な概念や事項について触れた後に、2 で確率(偏)微分方程式を論ずる上で基礎になるブラウン運動について説明します。確率積分も確率(偏)微分方程式を考える上で欠かせないものですが、それに関する計算を行うための道具が伊藤の公式です。これらの準備を行った後に、4, 5 で確率微分方程式と確率偏微分方程式について論じます。時間的に余裕があれば、後者の例として確率反応拡散方程式に対する特異極限の問題を取り上げたいと思います。

講義概要の英訳

After briefly summarizing in Section 1 the basic concepts and facts in probability theory such as probability spaces, random variables, their convergences, independence, the central limit theorem and Gaussian distributions, the Brownian motion will be introduced in Section 2. The stochastic integrals are essential to discuss stochastic (partial) differential equations and Ito's formula plays a central role in the calculus related to them. After these preparations, the stochastic differential equations and the stochastic partial differential equations will be discussed in Sections 4 and 5, respectively. If time permits, as an example of the stochastic partial differential equation, I will talk about the singular limit for stochastic reaction diffusion equations.

3. L^r 空間におけるベクトル場の分解定理とその応用について

(L^r Helmholtz decomposition and its application to the Navier-Stokes equations)

（担当：小薗英雄（東北大理学研究科数学科）

3.1 L^r 空間での Helmholtz-Weyl 分解

(Helmholtz-Weyl dcomposition in Lr)

3.2 L^r 変分不等式

(Lr-variational inequality)

3.3 一般 flux 条件下での定常ナヴィエ・ストークス方程式方程式

(Stationary Navier-Stokes equations under the general flux condition)

3.4 大域的発散・回転補題

(Global Div—Curl lemma)

3.5 一般的な補正コンパクト性定理

(General compensated compactness theorem)

講義概要

３次元空間内の滑らかな境界を持つ有界領域Ｄにおけるベクトル場は，スカラー及びベクトルポテンシャルを持つ部分と調和ベクトル場の３つの部分に一意的に分解される．この定理の一般化として，コンパクトなリーマン多様対上の滑らかな微分形式に対するドラーム・ホッジ・小平分解が知られている．ここでは上記のＤに限るが，ベクトル場としては L^r 空間に属するより広範な関数を対象とする．ベクトル場が滑らかである場合，このような分解定理は，アグモン・ダグラス．ニレンバーグによる楕円型偏微分方程式系の境界値問題に対するアプリオリ評価が基礎となる．しかし，単にベクトル場が L^r 可積分というのだけでは，彼等の一般論は適用できない．　このような困難さを克服するためには，発散 div と回転 rot に付随して決定される２次形式に関する変分不等式を用いる．この際，調和ベクトル場の境界条件としてどのようなものが自然かを議論する．

応用として，複数個の連結成分からなる境界をもつ３次元空間内の有界領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式の可解性と，与えられた境界値による流量との関係を明らかにする．さらに， ベクトル場の発散と回転に関する補正コンパクト性(compensated compactness)の補題をその境界条件と領域全体に亘る大域積分の観点から論じる．

講義内容の英訳

We show that every L^r-vector field on D can be uniquely decomposed into two spaces with scalar and vector potentials and the harmonic vector space via rot and div, where D is a bounded domain in R^3. This may be regarded as generalization of de Rham—Hodge decomposition for smooth k-forms on compact Riemannian manifolds. Our result holds not only smooth but also general L^r vector fields. Basically, construction of harmonic vector fields is established by means of the theory of elliptic PDE system of boundary value problems due to Agmon—Douglis—Nirenberg. Since we deal with L^r —vector fields, such a general theory is not directly available. To get around this difficulty, we make use of certain variational inequalities associated with the quadtatic forms defined by rot and div. various kinds of boundary conditions which are compatible to rot and div and which determine the harmonic parts are fully discussed.

As applications, we first consider the stationary problem of the Navier—Stokes equations in multi-connected domains under the inhomogeneous boundary condition. Up to the present, it is na open question whether there exists a solution if the given boundary data satisfies the general flux condition. It will be clarified that if the harmonic extension of the boundary data into D is small in $L^3(D)$ compared with the viscosity constant, then there is at least one weak solution.

The second application is on the global Div—Curl lemma. The classical Div—Curl lemma is stated in such a way that the convergence holds in the sense of distributions. Under the boundary condition determining the harmonic vector fields In the L^r —Helmholtz—Weyl decomposition in D, we show that the convergence to holds in the whole domain D. Furthermore, we give a more general compensated compacteness theorem in the Hilbert space associated with the global Div—Curl lemma.

4. 実補間と Stokes 半群に対する endpoint estimate
(Real interpolation and endpoint estimates for the Stokes semigroup)
（担当： 山崎昌男）

4.1 実補間の定義、基本的な性質と具体例
(Definition, fundamental property and concrete examples of real interpolation)

4 .2. 双対空間と実補間
(Dual spaces and real interpolation)

4.3. Stokes 半群の $L^q — L^r$ 評価
(The $L^q — L^r$ estimates for the Stokes semigroup)

4.4. Stokes 半群に対する endpoint estimate
(Endpoint estimates for the Stokes semigroup)

4.5 Navier-Stokes 方程式への応用

(Application to the Navier-Stokes equations)

講義概要

Navier-Stokes 方程式に対する精密な解析をする際に不可欠な道具になりつつある実解析的な手法のうちから実補間法を選び、Stokes 半群についての有用な評価を導くことを目的とします。まず実補間の定義と基本的な諸性質について学び、さらに具体例として Besov 空間と Lorentz 空間を導入します。ついで本講義における中心的手法である双対空間と実補間との関係を調べます。一方 Navier-Stokes 方程式の解析で重要な道具である、 Stokes 半群の $L^q - L^r$ 評価を示し、さらにその手法が Lorentz 空間にも拡張でき、精密な評価を導けることを確認します。最後にこの手法の具体的な非線形問題への応用について学びます。

講義概要の英訳：

The purpose of this course is to derive useful estimates for the Stokes semigroup by using real interpolation, which is one of real analytic tools indispenable in recent detailed analysis for the Navier-Stokes equations, We start with the definition and fundamental property of real interpolation, together with the Besov spaces and the Lorentz spaces as concrete examples. We next investigate the relationship between real interpolation and duality, which is one of the main methods in this lecture. Then we proceed to the $L^q - L^r$ estimates of the Stokes semigrop, an important tool in the analysis of the Navier-Stokes equations, and verify that the methods above can be applied also to the Lorentz spaces and yield precise estimates. We finally study of the application of these estimates to some concrete nonlinear problems.