

柴田良弘著：ルベーク積分論（内田老鶴圃） 補足及び修正

January 25, 2006

4.3 節について補足

$f \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対し $\int_X |f| d\mu < \infty$ より $E_\infty = \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ とおくと命題 4.3.4 より $\mu(E_\infty) = 0$ である．こうして $F = X - E_\infty = E_\infty^c$, χ_F を F の特性関数とすれば $f(x) = \chi_F(x)f(x)$ は $x \in F$ で成立するので, $a.e. x \in X$ で $f(x) = \chi_F(x)f(x)$ 成立する．こうして命題 4.3.4 より $\int_X f d\mu = \int_X \chi_F f d\mu$ であり, また $|\chi_F(x)f(x)| < \infty$ は全ての $x \in X$ について成立する．こうして以下積分の値が重要であるので一般に $f \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ を与えたときは f の代わりに $\chi_F f$ を考えることにする．このような操作を f を測度零の集合上の値を変えろという．即ち測度零の集合上での値を変えたものを改めて f と思うことで以後 $L(X, \mathcal{M}, \mu)$ は

$$L(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は } \mathcal{M} \text{ 可測関数かつ } \int_X |f| d\mu < \infty\}$$

とおく．

こうして, $f, g \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $af(x) + bg(x)$ は全ての $x \in X$ に対し有限値をとり命題 4.1.3 より \mathcal{M} 可測関数となる．

例えば, $|x|^{-1/2}$ は $[-1, 1]$ 上で積分可能であるが, $x = 0$ で ∞ となる．このときは,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

と考え, f を $|x|^{-1/2}$ と考えるのである．もし商空間という考えになれていれば, $L(X, \mathcal{M}, \mu)$ の元 f は μ a.e. $x \in X$ で $g(x) = f(x)$ となる g の代表元である．即ち $f \sim g$ を μ a.e. $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ となるものとしてこれで同値類を作り $[f] = \{g \mid f \sim g\}$ とする． $\int_X |f| d\mu < \infty$ のときは全ての $x \in X$ に対して $|f(x)| < \infty$ なる元を同値類の代表元にとるのである． \square

定理 5.3.2 (Fubini の定理) とその証明の修正

定理 5.3.2 (Fubini の定理)

$f(x, y) \in L(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ とする．このとき必要とあれば $\mu \times \nu$ 測度零の集合上で $f(x, y)$ の値を変えたものを改めて $f(x, y)$ とすれば, 全ての $x \in X, y \in Y$ に対して $f_x(y) \in L(Y, \mathcal{N}, \nu)$, $f^y(x) \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ である．さらに $g(x) = \int_Y f_x(y) d\nu$, $h(y) = \int_X f^y(x) d\mu$ とおくと $g \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$, $h \in L(Y, \mathcal{N}, \nu)$ でありさらに

$$\int_X g(x) d\mu = \int_Y h(y) d\nu = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$$

が成立する．

[注] ここで $\mu \times \nu$ 測度零の集合上で $f(x, y)$ の値を変えたものを改めて $f(x, y)$ とするとはある集合 $I \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ で $(\mu \times \nu)(I^c) = 0$ ($I^c = X \times Y \setminus I$) なるものがあって $\chi_I(x, y)$ を I の特性関数とすると $\chi_I(x, y)f(x, y)$ を改めて $f(x, y)$ とすればこの $f(x, y)$ に対して Fubini の定理の主張が成立するということである .

[定理 5.3.2 の証明] f が $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 可測関数で正 , 負両方の値をとるとする .

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y), \quad f^\pm(x, y) = \max(\pm f(x, y), 0)$$

と分解する . 定義 4.3.1 と $f \in L(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ より

$$\int_{X \times Y} f^\pm d(\mu \times \nu) < \infty \quad (5.3.7)$$

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^- d(\mu \times \nu) \quad (5.3.8)$$

である . 一方 $f^\pm(x, y) \in PL^+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ なので定理 5.3.1 より

$$\begin{aligned} G^\pm(x) &= \int_Y (f^\pm)_x(y) d\nu \in PL^+(X, \mathcal{M}, \mu), \quad H^\pm(y) = \int_X (f^\pm)^y(x) d\mu \in L(Y, \mathcal{N}, \nu) \\ \int_X G^\pm(x) d\mu &= \int_Y H^\pm(y) d\nu = \int_{X \times Y} f^\pm(x, y) d(\mu \times \nu) < \infty \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

である . 特に (5.3.9) と命題 4.3.4 より μ a.e. $x \in X$ と ν a.e. $y \in Y$ に対してそれぞれ $0 \leq G^\pm(x) < \infty, 0 \leq H^\pm(y) < \infty$ である . こうして $I_\infty^\pm \in \mathcal{M}, J_\infty^\pm \in \mathcal{N}$ を $\mu(I_\infty^\pm) = \nu(J_\infty^\pm) = 0$ かつ $x \notin I_\infty^\pm, y \notin J_\infty^\pm$ ならばそれぞれ $0 \leq G^\pm(x) < \infty, 0 \leq H^\pm(y) < \infty$ なる集合とする . いま $Z = ((I_\infty^+ \cup I_\infty^-) \times Y) \cup (X \times (J_\infty^+ \cup J_\infty^-))$ とおくと $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ と約束したことから , $(\mu \times \nu)(I_\infty^\pm \times Y) = \mu(I_\infty^\pm)\nu(Y) = 0, (\mu \times \nu)(X \times J_\infty^\pm) = \mu(X)\nu(J_\infty^\pm) = 0$ であるので $(\mu \times \nu)(Z) = 0$ である . こうして $\chi_{Z^c}(x, y)$ を Z の補集合 $Z^c = X \times Y - Z$ の特性関数として $\chi_{Z^c}(x, y)f(x, y) = \tilde{f}(x, y)$ とおく . 勿論 $\mu \times \nu$ a.e. $(x, y) \in X \times Y$ に対して $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)$ であるので $\tilde{f} \in L(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ かつ $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} \tilde{f}(x, y) d(\mu \times \nu)$ である . $\tilde{f}^\pm(x, y) = \max(\pm \tilde{f}(x, y), 0)$ とおくと (5.3.7), (5.3.8) が f を \tilde{f} に変えて成立する . また $\tilde{G}^\pm(x) = \int_Y (\tilde{f}^\pm)_x(y) d\nu, \tilde{H}^\pm(y) = \int_X (\tilde{f}^\pm)^y(x) d\mu$ とおくと

$$\tilde{G}^\pm(x) = \begin{cases} G^\pm(x) & x \notin I_\infty^\pm \\ 0 & x \in I_\infty^\pm \end{cases} \quad \tilde{H}^\pm(y) = \begin{cases} H^\pm(y) & y \notin J_\infty^\pm \\ 0 & y \in J_\infty^\pm \end{cases} \quad (5.3.10)$$

である . 実際 ,

$$\begin{aligned} (\tilde{f}^\pm)_x(y) &= \tilde{f}^\pm(x, y) = \max(\pm \chi_{Z^c}(x, y)f(x, y), 0) = \max(\pm f(x, y), 0) \\ &= f^\pm(x, y) = (f^\pm)_x(y) \quad (x \notin I_\infty^\pm, y \notin J_\infty^\pm) \end{aligned}$$

であるので $x \notin I_\infty^\pm$ のとき $\nu(J_\infty^\pm) = 0$ より

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\pm(x) &= \int_Y (\tilde{f}^\pm)_x(y) d\nu = \int_{Y \setminus J_\infty^\pm} (\tilde{f}^\pm)_x(y) d\nu \\ &= \int_{Y \setminus J_\infty^\pm} (f^\pm)_x(y) d\nu = \int_Y (f^\pm)_x(y) d\nu = G^\pm(x) \end{aligned}$$

また $x \in I_\infty^\pm$ のときは $\chi_{Z^c}(x, y) = 0$ が全ての $y \in Y$ について成立するので $(\tilde{f}^\pm)_x(y) = 0$ であるので $\tilde{G}^\pm(x) = 0$ である . こうして (5.3.10) のはじめのことが示せた . 2 番目のことも同

様に示せる．とくに $0 \leq \tilde{G}^\pm(x) < \infty$, $0 \leq \tilde{H}^\pm(y) < \infty$ が全ての $x \in X$, $y \in Y$ に対して成立する．以上の考察から $f(x, y)$ の代わりに $\tilde{f}(x, y)$ を改めて $f(x, y)$ と書いて話を始めれば, (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9) が成立するのみならず, 全ての $x \in X$, $y \in Y$ に対して $0 \leq G^\pm(x) < \infty$, $0 \leq H^\pm(y) < \infty$ が仮定できる．よって特に $G^\pm(x) \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$, $H^\pm(y) \in L(Y, \mathcal{N}, \nu)$ であるので, $G(x) = G^+(x) - G^-(x) \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$, $H(y) = H^+(y) - H^-(y) \in L(Y, \mathcal{N}, \nu)$ かつ

$$\begin{aligned} \int_X G(x) d\mu &= \int_X G^+(x) d\mu - \int_X G^-(x) d\mu \\ &= \int_{X \times Y} f^+(x, y) d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^-(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

が命題 4.3.2 と (5.3.8), (5.3.9) より従う．同様にして

$$\begin{aligned} \int_Y H(y) d\nu &= \int_Y H^+(y) d\nu - \int_Y H^-(y) d\nu \\ &= \int_{X \times Y} f^+(x, y) d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^-(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

が従う．

最後に $(f^\pm)_x(y) = f^\pm(x, y) = \max(\pm f(x, y), 0) = \max(\pm f_x(y), 0) = (f_x)^\pm(y)$ であることに注意すれば, $G^\pm(x) = \int_Y (f_x)^\pm(y) d\nu$ であるので $0 \leq \int_Y (f_x)^\pm(y) d\nu < \infty$ が全ての $x \in X$ について成立する．これより $f_x(y) \in L(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が全ての $x \in X$ について成立し $g(x) = \int_Y f_x(y) d\nu = G^+(x) - G^-(x) = G(x)$ である．同様にして全ての $y \in Y$ に対して $f^y(x) \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ かつ $h(y) = \int_X f^y(x) d\mu = H^+(y) - H^-(y) = H(y)$ がいえる．こうして (5.3.11), (5.3.12) より

$$\int_X g(x) d\mu = \int_Y h(y) d\nu = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$$

が言えた．

□